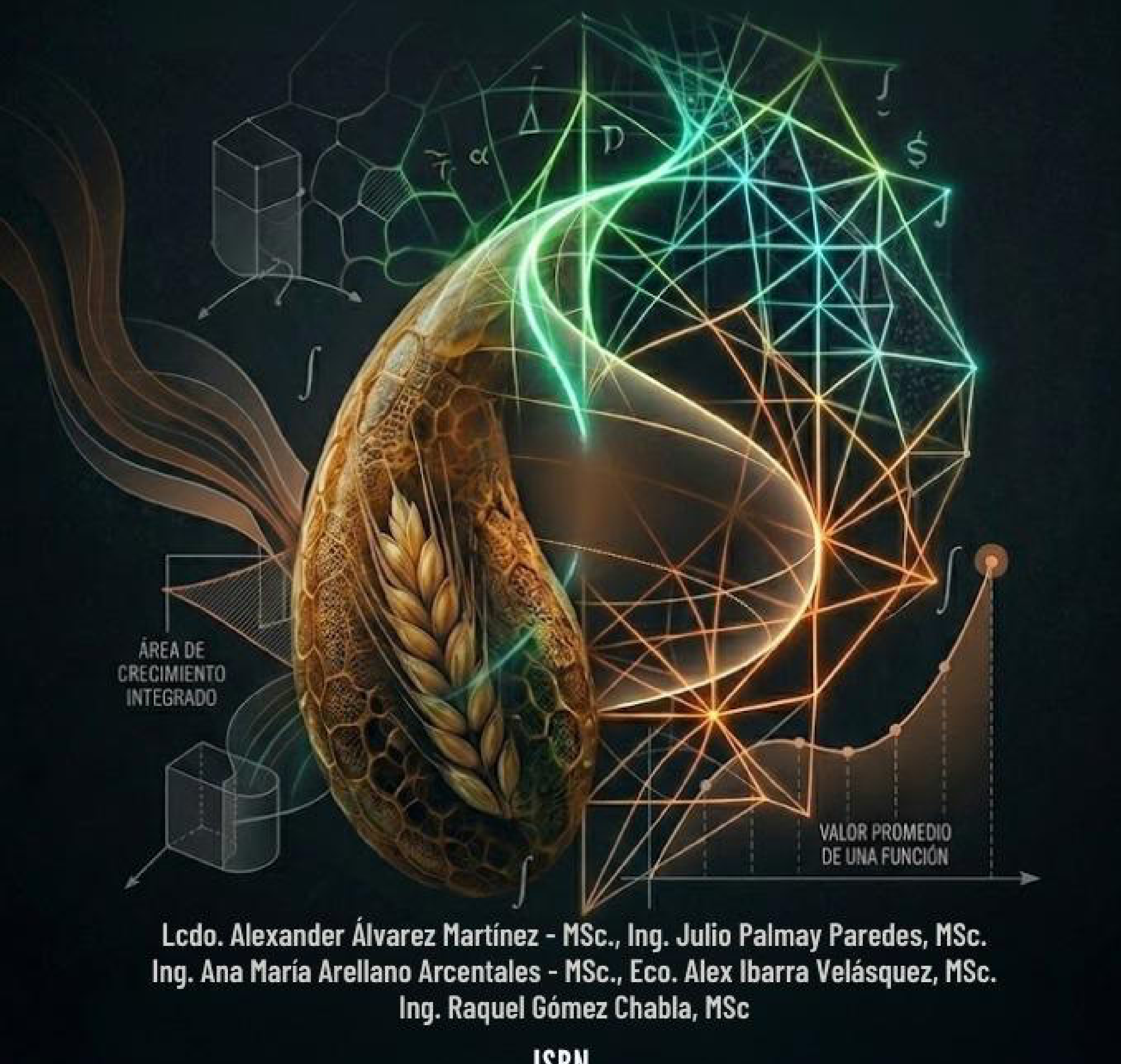
GRUPO BLR

CÁLCULO INTEGRAL
APLICADO A LA AGROINDUSTRIA
MANUAL DIDÁCTICO PARA EL APRENDIZAJE PRÁCTICO



Lcdo. Alexander Álvarez Martínez - MSc., Ing. Julio Palmay Paredes, MSc.
Ing. Ana María Arellano Arcentales - MSc., Eco. Alex Ibarra Velásquez, MSc.
Ing. Raquel Gómez Chabla, MSc

ISBN
2026

CÁLCULO INTEGRAL APLICADO A LA AGROINDUSTRIA MANUAL DIDÁCTICO PARA EL APRENDIZAJE PRÁCTICO

AUTORES:

ALEXANDER ENRIQUE ÁLVAREZ MARTÍNEZ

JULIO ANDRÉS PALMAY-PAREDES

ANA MARÍA ARELLANO ARCENTALES

ALEX AURELIO IBARRA VELÁSQUEZ

GRUPO BLR

Este libro ha sido debidamente examinado y valorado en la modalidad doble par ciego con fin de garantizar la calidad científica.

©Grupo Editorial BLR
Universidad Estatal de Bolívar
Riobamba – Ecuador
Correo: publicaciones@grupoblr.com
https://grupoblr.com/libros-investigo
REPOSITORIO

Álvarez, A.,Palmay, J.,Arellano, A.,Ibarra, A., Gómez, R. (2026)
Cálculo integral aplicado a la agroindustria manual didáctico para el aprendizaje práctico. Grupo Editorial BLR.

© Alexander Enrique Álvarez Martínez
Julio Andrés Palmay-Paredes
Ana María Arellano Arcentales
Alex Aurelio Ibarra Velásquez
Raquel Regina Gómez Chabla

ISBN:

FILIACIONES DE LOS AUTORES

Alexander Enrique Álvarez Martínez

Universidad Agraria del Ecuador

Correo Electrónico: aalvarez@uagraria.edu.ec

ORCID: https://orcid.org/0009-0007-1095-0658

Julio Andrés Palmay-Paredes

Universidad Agraria del Ecuador

Instituto Superior Tecnológico Superase, Sangolqui 170501, Ecuador

Correo Electrónico: jpalmay@uagraria.edu.ec

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7546-5211

Ana María Arellano Arcentales

Universidad Agraria del Ecuador

Correo Electrónico: aarellano@uagraria.edu.ec

ORCID: https://orcid.org/0009-0006-5606-411X

Alex Aurelio Ibarra Velásquez

Universidad Agraria del Ecuador

Correo Electrónico: uagraria@uagraria.edu.ec

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1876-5672

Raquel Regina Gómez Chabla

Universidad Agraria del Ecuador

Correo Electrónico: rgomez@uagraria.edu.ec

GRUPO BLR

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje del Cálculo Integral es importante debido a que propicia el pensamiento lógico-analítico y se utiliza como herramienta para resolver problemas reales y concretos de diversas áreas del conocimiento, no sólo en Matemáticas y Física, sino en disciplinas tales como la Ingeniería, Economía, entre otras.

La aplicación de los teoremas esenciales propicia en las personas que estudian o practican los métodos del cálculo integral una evolución en sus capacidades de abstracción y razonamiento que conlleva a una madurez matemática, necesarios para operar y aplicar funciones matemáticas con variable real en el planteamiento y solución de situaciones prácticas que llegan a presentarse en su ejercicio profesional. La integración se considera un eje fundamental para el planteamiento y desarrollo de conceptos que permiten entender y asimilar conocimientos.

Figura 1. Sir George Gabriel Stokes

Nota: *George Stokes 1819-1903. Sir George Gabriel Stokes, basado en foto de Fradelle y Young*

George Stokes fue el hijo menor del Reverendo Gabriel Stokes, rector de Skreen, en el condado de Sligo. Allí nació y creció George, en el seno de una familia protestante evangélica. George se matriculó en 1837 en Pembroke College, en la Universidad de Cambridge, donde cuatro años más tarde, tras graduarse con los más altos honores, fue elegido para ocupar una plaza de profesor. George Stokes ocupó esta plaza hasta 1857. El Teorema de Stokes: Supongamos que S es una superficie lisa, orientada y a trozos con un borde que es una curva simple cerrada C con orientación positiva. Si F es un campo vectorial con funciones componentes que tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a S, entonces:

$$\int_C F.dr = \iint_S rizoF.dr$$

Los integrales son muy útiles en diversos cálculos o aplicaciones, entre los que podemos nombrar se encuentran:

- Obtener el área de regiones planas.
- Calcular el volumen de un sólido de revolución.
- Calcular el volumen de sólidos con secciones conocidas.
- Determinar la longitud de una curva.
- Conocer el valor promedio de una función.
- Calcular el centro de masas de regiones planas.
- Calcular el momento de inercia.

CAPÍTULO I

1 APLICACIONES DE LAS INTEGRALES

Las integrales constituyen una herramienta fundamental del cálculo en la ingeniería y en otros campos de las ciencias. Entre estas aplicaciones podemos mencionar:

1.1. Aplicaciones de las integrales en Física

En física se utilizan para calcular la variación del desplazamiento con respecto al tiempo, la aceleración y el trabajo aplicado por una fuerza variable. Los siguientes son algunos ejemplos de estas aplicaciones:

Las integrales se utilizan en la ciencia, la tecnología y la ingeniería para calcular una variedad de cantidades, como el área, el volumen y la masa. Los siguientes son algunos ejemplos de aplicaciones de integrales en estas áreas:

- **Cálculo de áreas y volúmenes**

Las integrales pueden utilizarse para calcular el área de una superficie o el volumen de un sólido generado por una región girada en torno a un eje, como un cilindro o una esfera.

- **Cálculo de masas**

La masa de un objeto con densidad variable puede ser encontrada usando el cálculo integral. Para esto, tomamos la integral de la densidad con respecto al volumen. Este método se conoce como integral de masa.

1.2. Aplicaciones de las derivadas en la vida cotidiana

Las aplicaciones de las integrales quizá no sean tan visibles en nuestra vida cotidiana, pero todas las aplicaciones mencionadas anteriormente influyen en el diseño y producción todos los productos y comodidades de las que nos beneficiamos diariamente.

Además, los siguientes son ejemplos adicionales de aplicaciones prácticas de las integrales:

El cálculo integral es usado en finanzas y economía para calcular diversas cantidades, como el coste total y los ingresos de una empresa, el valor presente y futuro de una inversión y el valor razonable de un instrumento financiero.

CAPÍTULO II

2 ANTIDERIVADA

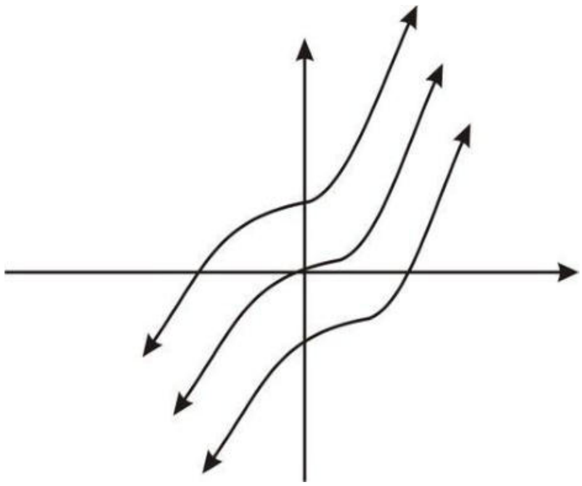


Figura 2. Gráfica de antiderivada.

Nota. *Dada una función, la antiderivada no es única, puesto que existe una infinidad de antiderivadas conocidas como familia de antiderivadas, es decir, si es una antiderivada de entonces F (x) + C.*

2.1. Definición de antiderivada

Se llama antiderivada a una función f(x), en un intervalo I, si $F'(x) = f(x),$ ∀ valor de x en el intervalo I.

- **Ejemplos**

a. $F(x) = 4x^3 + x^2 + 5 \Rightarrow f'(x) = 12x^2 + 2x$, esto implica que F(x) es la antiderivada de f(x)

b. $G(x) = 4x^3 + x^2 - 8 \ \Rightarrow g'(x) = 12x^2 + 2x$, esto implica que F(x) es la antiderivada de f(x)

c. $A(x) = 4x^3 + x^2 + C \Rightarrow h'(x) = 12x^2 + 2x$, esto implica que F(x) es la antiderivada de f(x)

- **Teorema**: Si F y G son dos funciones tales que $f'(x) = g'(x)\ \forall\ x \epsilon I$ entonces, $\exists\ C\ tal\ que\ F(x) = G(x) + C, \quad \forall\ x \in I$

2.2. Definición de antidiferenciación

La antidiferenciación es el procedimiento por medio del cual se determinan todas las antiderivadas de una función dada. El símbolo $\int$ denota la operación de antidiferenciación y se escribe:

$\int F(x)dx = F(x) + C$, donde dx indica la variable a integrar y c es la constante de integración.

- **Ejemplos**

Observemos con detenimiento los siguientes ejemplos ilustrativos para el valor de c:

a) $F(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = 2x$, lo que indica que $F(x) = x^2$ es la antiderivada de $f(x) = 2x$

b) $F(x) = x^2 + 4 \Rightarrow f(x) = 2x$, lo que indica que $F(x) = x^2 + 4$es la antiderivada de $f(x) = 2x$

c) $F(x) = x^2 - 2 \Rightarrow f(x) = 2x$, lo que indica que $F(x) = x^2 - 2$es la antiderivada de $f(x) = 2x$

Podemos observar claramente que en el ejemplo a la constante c vale 0 (cero), pero en el ejemplo b vale cuatro (4) y en el ejemplo c tiene un valor de menos dos (-2). Esto nos da una idea de que la antiderivada no es única, sino que existe lo que denominaremos una familia de antiderivadas que se diferencian por la constante de integración c.

Gráficamente podemos visualizar el comportamiento de la función y la constante de integración:

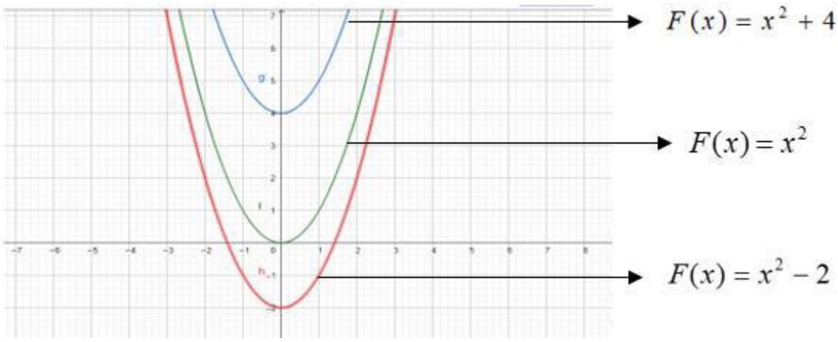


Figura 3. Comportamiento de una función y su constante de integración.

- **Teorema**: Si F y G son dos funciones tales que $f'(x) = g'(x)\ \forall\ x \in I$ entonces $\exists\ C\ tq\ F(x) = G(x) + C\ \forall\ x\ \in I$

2.3. Reglas de la integración

a. Si la integral la constituye una variable con un exponente n, se le suma 1 al exponente de la variable y se lo divide para el número de la exponente más 1 y de esta forma se obtiene la antiderivada.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

b. Si hay una constante multiplica la variable, esta se debe sacar antes del símbolo de la integral con la misma operación y luego se aplica la regla número 1.

$$\int k\, x^n\, dx = k\int x^n + C$$

$$= k\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

c. Si se tiene dos o más términos sumando o restando, se debe colocar a cada una con su respectiva integral y el diferencial de variable separadas por su signo.

$$\int [F(x) \pm G(x)]dx$$

$$= \int F(x)dx \pm \int G(x)dx$$

2.4. Tabla de integrales

Tabla 1. Tabla de integrales.

1. $\int udv = uv - \int vdu\,;\, Integración\ por\ partes$	2. $\int sec^2(u)\, du = tan(u) + C$
3. $\int du = u + C$	4. $\int csc^2(u)\, du = -\, cot(u) + C$
5. $\int kdu = ku + C\ Donde\ k\ es\ una\ constante$	6. $\int \sec(u)\tan(u)dx = \sec(u) + C$
7. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C;\, para\ n \neq -1$	8. $\int \csc(u)\cot(u)du = -\csc(u) + C$
9. $\int \frac{du}{u} = \mathrm{Ln}\lvert u\rvert + C$	10. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\mathrm{Ln}\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C;\,(u^2 > a^2)$
11. $\int e^u du = e^u + C$	12. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\mathrm{Ln}\left\lvert\frac{u+a}{u-a}\right\rvert + C;\,(a^2 > u^2)$

13. $\int a^u du = \frac{a^u}{\text{Ln}\lvert a\rvert} + C; donde\ a > 0\ y\ a \neq 1$	14. $\int \frac{\mathrm{du}}{\sqrt{\mathrm{a^2-u^2}}} = \text{arcsen}\left(\frac{u}{a}\right) + \mathrm{C};$ donde a > 0
15. $\int \text{sen}(u)\, du = -\cos(u) + C$	16. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} arcsec\left(\frac{u}{a}\right) + \mathrm{C};$ donde a > 0
17. $\int \cos(u)\, du = \text{sen}(u) + C$	18. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\ arctan\left(\frac{u}{a}\right) + \mathrm{C}$
19. $\int \tan(u)\, du = \text{Ln}\lvert\sec(u)\rvert + C$	20. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \text{Ln}\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\rvert + C$

2.5. Tabla de derivadas

Tabla 2. Tabla de derivadas.

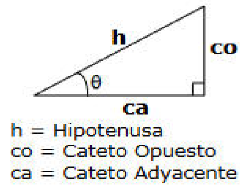
1. $D_X(u^n) = nu^{n-1}D_x u$	2. $D_x(\text{sen}\, u) = \cos u\, D_x u$	3. $D_x(\text{arcsen}\, u) = \dfrac{D_x u}{\sqrt{1-u^2}}$
4. $D_X(u+v) = D_x u + D_x v$	5. $D_x(\cos u) = -\,\text{sen}\, u\, D_x u$	6. $D_x(\arccos u) = \dfrac{-D_x u}{\sqrt{1-u^2}}$
7. $D_X(uv) = uD_x v + vD_x u$	8. $D_x(\tan u) = \sec^2 u\, D_x u$	9. $D_x(\arctan u) = \dfrac{D_x u}{1+u^2}$
10. $D_x\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vD_x u - uD_x v}{v^2}$	11. $D_x(\cot u) = -\csc^2 u\, D_x u$	12. $D_x(\text{arccot}\, u) = \dfrac{-D_x u}{1+u^2}$

$13. D_x(e^u) = e^u D_x u$	$14. D_x(\csc u)$ $= -\csc u \cot u \, D_x u$	$15. D_x(\text{arcsec}\, u)$ $= \frac{D_x u}{\|u\|\sqrt{u^2 - 1}}$
$16. D_x(a^u) = a^u Ln(a) D_x u$	$17. D_x(\sec u)$ $= \sec u \tan u \, D_x u$	$18. D_x(\text{arccsc}\, u)$ $= \frac{-D_x u}{\|u\|\sqrt{u^2 - 1}}$
$19. D_x Ln(u) = \frac{D_x u}{u}$		

2.6. Tabla de identidades trigonométricas

Tabla 3. Tabla de identidades trigonométricas.

$1. \cos^2(x) + \text{sen}^2(x) = 1$	$2. \cos(2x)$ $= \cos^2(x)$ $- \text{sen}^2(x)$
$3. \sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$	$4. \text{sen}(-x) = -\sin(x) \quad \cos(-x) = -\cos(x)$
$5. \csc^2(x) = 1 + \cot^2(x)$	$6. \tan(-x) = -\tan(x) \quad \cot(-x) = -\cot(x)$
$7. \text{sen}(x)\csc(x) = 1$	$8. \sec(-x) = -\sec(x) \quad \csc(-x) = -\csc(x)$
$9. \cos(x)\sec(x) = 1$	
$11. \tan(x)\cot(x) = 1$	

$13. \tan(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$	$10. \sin(\theta) = \frac{co}{h}$ $\csc(\theta) = \frac{h}{co}$ $12. \cos(\theta) = \frac{ca}{h}$ $\quad \sec(\theta) = \frac{h}{ca}$  $14. \tan(\theta) = \frac{co}{ca}$ $\quad \cot(\theta) = \frac{ca}{co}$
$15. \cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$	$16. \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx) = \frac{1}{2}[\cos(m-n)\,x - \cos(m+n)\,x]$
$17. \operatorname{sen}^2(x) = \dfrac{1}{2}[1 - \cos(2x)]$	$18. \cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}[\cos(m+n)\,x + \cos(m-n)\,x]$
$19. \cos^2(x) = \dfrac{1}{2}[1 + \cos(2x)]$	$20. \operatorname{sen}(mx)\ \cos(nx) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)\,x + \operatorname{sen}(m-n)\,x]$
$21. \operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$	$22. \cos(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)\,x + \operatorname{sen}(m-n)\,x]$

CAPÍTULO III

3 INTEGRALES INMEDIATAS

Figura 4. Pierre de Fermat.

- Aportaciones al cálculo y geometría analítica:

Junto con René Descartes, Fermat fue uno de los pioneros de la geometría analítica, que combina la geometría con el álgebra. Su trabajo en esta área sentó las bases para el desarrollo del cálculo diferencial e integral.

- Método de Máximos y Mínimos:

Fermat desarrolló un método para encontrar los máximos y mínimos de una curva, que puede considerarse un precursor del cálculo diferencial. Este método se basa en encontrar los puntos donde la tangente a la curva es horizontal.

- Cálculo de tangentes:

Su método para calcular tangentes a diversas curvas, como elipses, cicloides y otras, demostró su habilidad para trabajar con la geometría y la dinámica de las curvas.

3.1. Definición de integral inmediata

Una integral inmediata es aquella que se puede obtener mediante la aplicación de las reglas de las integrales o haciendo uso de las tablas de las integrales.

Dada una función $f(x)$, decimos que la función $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ si se cumple: $F'(x) = f(x)$. Se representa por: $\int f(x) \pm dx = F(x) + c$

3.2. Reglas

- **Primera regla**

Tabla 4. Primera regla.

Derivada	Antiderivada
$y = x^n$ $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$	$\int x^n dx = x^{n+1} + c$

- ## Segunda Regla

Tabla 5. Segunda regla.

Derivada	**Antiderivada**
$y = x^n$ $\frac{dy}{dx} = n\frac{d}{dx}(x^n)$ $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$	$\int kx^n dx = k\int x^n\, dx$ $\int kx^n dx = k\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

- ## Tercera Regla

Tabla 6. Tercera regla.

Derivadas	**Antiderivadas**
$y = f(x) \pm g(x)$ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)]$	$\int [f(x) \pm g(x)] = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

3.3. Ejercicios ilustrativos

a. Ejemplo ilustrativo 1

Calcular la integral $\int 3x^4 dx$, aplicando las reglas

Solución:

$\boldsymbol{\int 3x^4\, dx \quad = \quad 3\int x^4\, dx}$ Aplicamos la regla n°2 para sacar el factor 3

$$= \mathbf{3} \cdot \frac{\boldsymbol{x^{4+1}}}{\mathbf{4+1}} + \boldsymbol{c}$$ Luego aplicamos la regla n°1

$$= \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} \boldsymbol{x^5} + \boldsymbol{C}$$

b. Ejemplo ilustrativo 2

Calcular la integral $\int 22x \sqrt[3]{x^5}\, dx$, aplicando las reglas

Solución:

$\int 22x \sqrt[3]{x^5} = 22 \int x^3 \cdot x^{5/2}\, dx$ **Aplicamos la regla n°2 para sacar el factor 22 y redefinimos cada factor**

$$= 22 \int x^{11/3} dx$$

$$= \frac{22 \cdot x^{11/3+1}}{11/3+1} + C$$

$$= \frac{22 \cdot x^{14/3}}{14/3} + C$$

$$= \frac{66}{14} \cdot x^{14/3} + C$$

$$= \frac{33}{7} \cdot x^{14/3} + C$$

c. Ejemplo ilustrativo 3

Calcular $\int 2x^2(2 + 3x^2 - 8x^3)\, dx$

$\int 2x^2(2 + 3x^2 - 8x^3)\, dx = \int (4x^2 + 6x^4 - 16x^5)\, \mathrm{dx}$ Para poder aplicar las reglas inicialmente se resuelve la multiplicación

$\int(4x^2 + 6x^4 - 16x^5)\,\mathrm{dx} = \; 4\int x^2dx + 6\int x^4dx - 16\int x^5dx$

Luego se aplica la regla 2 y3

$= \; \frac{4\cdot x^{2+1}}{2+1} + \frac{6\cdot x^{4+1}}{4+1} - \frac{16\cdot x^{5+1}}{5+1} + C$ y finalmente la regla n°1

$$=\frac{4}{3}\cdot x^3 + \frac{6}{5}\cdot x^5 - \frac{16}{6}\cdot x^6 + C$$

$$= \frac{4}{3}\cdot x^3 + \frac{6}{5}\cdot x^5 - \frac{8}{3}x^6 + C$$

d. Ejercicio ilustrativo 4

$\int 3x^2dx = 3\int x^2dx$

$= 3\,\frac{x^{2+1}}{2+1} + c$

$= 3 * \frac{x^3}{3} + c$

$= x^3 + c$

- Se aplica la regla #2
- Se integra normalmente con la regla #1

e. Ejercicio ilustrativo 5

Nota: Tiene una similitud con el anterior ejercicio por usar la regla #2, y #1

$$\int\left(x^{\frac{3}{2}} + 5\sqrt{x} - 3\right)dx = \int\left(x^{3/2} + 5x^{1/2} - 3\right)dx$$

$$= \int x^{3/2}dx + 5\int x^{1/2}dx - \int 3dx$$

$$= 2\frac{x^{5/2}}{5} + 5\left(2\frac{x^{3/2}}{3}\right) - 3x + c$$

$$= 2\frac{x^{5/2}}{5} + \frac{10x^{3/2}}{3} - 3x + c$$

- Se aplica la regla #3 para separar
- Se realiza la regla #2 en la segunda integral
- Se integra normalmente con la regla #1

f. *Ejercicio ilustrativo 6*

Nota: Solo tiene una similitud con el anterior ejercicio por utilizar la regla #1

$$\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx$$

$$= \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c$$

$$= -\frac{1}{2}x^{-2} + c$$

Nota: Se redefine la integral para poder utilizar la regla n°1

- Se sube la x3 y se lo pasa a negativo utilizando la propiedad de la potenciación $\frac{x^0}{x^3} = x^{0-3}$
- Se integra normalmente con la regla #1
- Se expresa con el ½

g. *Ejercicio ilustrativo 7*

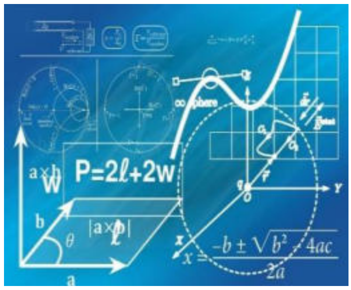
Se resuelve por tabla

$$\int 7^y\, dy = \frac{7^y}{Ln7} + c$$

h. Ejercicio ilustrativo 8

Nota: Solo tiene una similitud con la regla #1 y el ejemplo ilustrativo 3

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int \frac{1}{x^{1/3}} dx$$



$= \int x^{-1/3}\, dx$

$$= \frac{x^{2/3}}{\frac{2}{3}} + c$$

$= \frac{3x^{2/3}}{2} + c$

- Se convierte la raíz en potencia
- Se sube con la propiedad de la potencia $x^{-1/3}$
- Se resuelve por la regla #1

i. Ejercicio ilustrativo 9

$\int y^3(2y^2 - 3)dy = \int 2y^5 - 3y^3 dy$, Se multiplica por regla distributiva

$= 2\int y^5 dy - 3\int y^3 dy$, Se aplican las reglas 3 y 2

$= 2\frac{y^6}{6} - 3\frac{y^4}{4} + c$, Finalmente se resuelve con la regla #1

$= \frac{1}{3}y^6 - \frac{3}{4}y^4 + c$

j. Ejercicio ilustrativo 10

Nota: Tiene una similitud con el anterior ejercicio por usar la regla #2 y regla #1

$$\int 3x^{2/3}dx = 3\int x^{2/3}dx$$

$$= \frac{3\left(3x^{2/3+1}\right)}{5} + c$$

$$= \frac{9}{5}x^{5/3} + c$$

k. *Ejercicio ilustrativo 11*

Nota: Tiene una similitud con el anterior ejercicio por usar la regla #1 y regla #3

$$\int(2\,cot(\,\varphi) - 3\,tan(\,\varphi))d\varphi = 2\int cot(\,\varphi)\,d\varphi - 3\int tan(\,\varphi)d\varphi$$

$$= 2Ln|Sen(\varphi)| - 3Ln|Sec(\varphi)| + c$$

$$= Ln|Sen^2(\varphi)| - Ln|Sec^3(\varphi) + c$$

$$= Ln|\frac{Sen^2(\varphi)}{Sec^3(\varphi)}| + c$$

$$=Ln|\frac{Sen^2(\varphi)}{\frac{1}{Cos^3(\varphi)}}| + c$$

$$= Ln|Sen^2(\varphi)Cos^3| + c$$

$$= Ln|\frac{Sen^2(\varphi)}{Sec^3(\varphi)}| + c$$

- Se aplica la regla #3
- Se resuelve las trigonometrías por tabla
- Se une por método matemático el

- Se resuelve por identidad trigonométrica
- Se soluciona con extremo con extremo y medios con medios

l. Ejercicio ilustrativo 12

$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{x^{1/2}}$

$= \int x^{-1/2}$

$= \int x^{1/2}$

$= 2\sqrt{x} + c$

- Se aplica la regla #2 convirtiendo la raíz
- Se sube la $x^{1/2}$
- Se resuelve por la regla #1
- Se expresa la raíz

m. Ejercicio ilustrativo 13

$$\int \frac{dx}{Sen^2(x)} = \int Sen^{-2}(x)dx$$

$$= \int Csc^2(x)dx$$

$$= -Cot(x) + c$$

- Se aplica la regla #2
- Y luego por identidad trigonométrica

n. Ejercicio ilustrativo 14

$\int(5y^2 - 3y^{-1/4})dy = 5\int y^2 dy - 3\int y^{-1/4}dy$

$$= \frac{5y^3}{3} - \frac{(3)(4y^{3/4})}{3} + c$$

$$= \frac{5y^3}{3} - \frac{12y^{3/4}}{3} + c$$

$$= \frac{5y^3}{3} - 4y^{3/4} + c$$

- Se aplica la regla #3
- Se integra normalmente con la regla #1

o. Ejercicio ilustrativo 15

$$\int \frac{du}{Cos(u)} = \int \frac{1}{Cos(u)}du$$

$$= Ln|Sen^2(u)$$

- Se resuelve por tabla de Logaritmo Natural

p. Ejercicio ilustrativo 16

Se aplica la regla n°3 utilizando la suma de fracciones de igual denominador

$$\int \frac{4x^2 - 2\sqrt{x}}{x}dx = \int \frac{4x^2}{x}dx - \int \frac{2x^{1/2}}{x}dx$$

$$= \int(4x^2)(x^{-1})\,dx - \int(2x^{1/2})(x^{-1})dx$$

Se aplica la regla #2 convirtiendo la raíz

$$= 4\int xdx - 2\int x^{-1/2}dx$$

$$= \frac{4x^2}{2} - \frac{2x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2x^2 - 4\sqrt{x} + c$$

q. Ejercicio ilustrativo 17

Nota: No tiene similitud con el anterior porque se usó tabla

$$\int \frac{Sen(t)}{Cos(t)} dt = \int Tan(t)dt$$

$$= Ln|Sec(t)| + c$$

- Se resuelve por identidad trigonométrica

r. Ejercicio ilustrativo 18

$$\int \sqrt{ax}dx = \int (ax)^{1/2}dx$$

$$= \frac{a^{1/2}x^{3/2}}{3/2} + c$$

$$= \frac{2\sqrt{ax^3}}{3} + c$$

- Se convierte la raíz a fracción por regla #2
- Se resuelve por regla #1
- Se expresa la fracción a raíz

s. Ejercicio ilustrativo 19

$$\int x(2x+1)^2 = \int x(4x^2 + 2(2x)(1) + 1^2)dx$$

$$= \int x(4x^2 + 4x + 1)dx$$

$$= \int (4x^3 + 4x^2 + 1x)dx$$

$$= 4\int x^3\,dx + 4\int x^2\,dx + 1\int xdx$$

$$= 4 * \frac{x^4}{4} + 4 * \frac{x^3}{3} + 1 * \frac{x^2}{2} + c$$

$$= x^4 + \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c$$

- Se resuelve el binomio al cuadrado
- Se resuelve por método distributiva
- Se aplica la regla #3
- Se soluciona por la regla #1

3.4. Ejercicios propuestos

Tabla 7. Ejercicios propuestos.

Integral	**Respuesta**
1. $\int \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2}\right) dx$	$\frac{x^3}{6} + \frac{2}{x} + C$
2. $\int \frac{x^3-6x+5}{x}\,dx$	$\frac{x^3}{3} - 6x + 5Ln\lvert x\rvert + C$
3. $\int \frac{dt}{t}$	$Ln\lvert t\rvert + C$
4. $\int Sec^3(\theta)\,Cos(\theta)\,d\theta$	$Tan(\theta) + C$

5. $\int \ell^{y} dy$	$\ell^{y} + C$
6. $\int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 5\right)\, dx$	$-\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 5x + C$
7. $\int (3 - 2t + t^2)\, dx$	$3t - t^2 + \frac{1}{3}t^3 + C$
8. $\int 5u^{3/2}\, dx$	$2u^{5/2} + C$
9. $\int \sqrt{x}\,(x+1)\, dx$	$\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{2}{3}x^{3/2} + C$
10. $\int 10\ {}^{3}\sqrt{x^2\ \mathrm{dx}}$	$6x^{5/3} + C$
11. $\int \left(u^{3/2} - u\right)\, du$	$\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{1}{2}u^2 + C$
12. $\int 6x^2\, \sqrt[3]{x}\, dx$	$\frac{9}{5}x^{10/3} + C$
13. $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\, dx$	$\frac{3}{4}x^{4/3} + \frac{3}{2}x^{2/3} + C$
20. $\int \sqrt[3]{\ell^{2x}}\ \sqrt[6]{\ell^{2x}}\ \ dx$	$\ell^{x} + C$
21. $\int (4x^3 - x^2)\, dx$	$x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$

22. $\int(4x^3 - 6x^2 - 4x + 5)\ dx$	$x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 5x + C$
23. $\int \frac{x^2+4x-4}{\sqrt{x}} dx$	$\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{8}{3}x^{3/8} - 8x^{1/2} + C$
24. $\int[3Sen(t) - 2Cos(t)]\ dt$	$-3Cos(t) - 2Sen(t) + C$
25. $\int(2Cot^2(\theta) - 3Tan^2(\theta))\ d\theta$	$-2Cot(\theta) - 3Tan(\theta) + \theta + C$
26. $\int(3Csc^2(t) -$ $5Sen(t)\, Tan(t))\ dx$	$-(3Cot(t) + 5Sen(t))\ + C$

CAPÍTULO IV

4 TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

4.1. Integración por sustitución elemental o cambio de variable

- **Definición del método:** Este método consiste en cambiar o sustituir la variable de la integral, la cual no se puede realizar por las reglas explicadas anteriormente, por otra variable de tal manera que se puedan aplicar dichas reglas. Para lograr la sustitución se deben seguir los siguientes pasos:
- Identificar los factores que componen la integral
- Verificar cuál de ellos derivado resulta el otro factor
- Luego cambiar el nombre a dicho factor con otra variable y derivarla
- Realizar la sustitución

4.1.1. Ejercicios ilustrativos

a. Ejercicio ilustrativo 1

Calcular $\int \sqrt[3]{(1-4y\,)}dy$ utilizando el cambio de variable.

- **Solución**

En primer lugar, se redefine la raíz como potencia utilizando la definición $\sqrt[n]{x^b} = x^{b/n}$

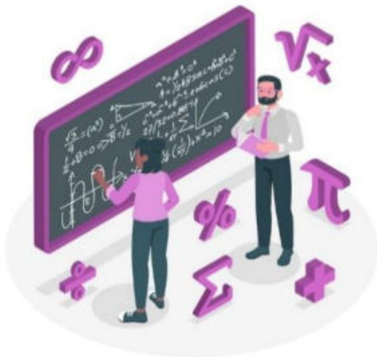
$\int \sqrt[3]{(1-4y)}$ dy = $\int (1-4y)^{1/3}\ dy$

Cambio de variable

Sea $1-4y=u \rightarrow -4dy=du \rightarrow dy = \frac{du}{-4}$

Sustituyendo u y dy en (A) tenemos

$= \int u^{1/3} \cdot \frac{du}{-4}$ Esta integral ahora es inmediata



$= \frac{1}{-4} \int u^{1/3}\, du$ Se aplica la regla 2

$= \frac{1}{-4} \frac{u^{4/3}}{\frac{4}{3}} + c$ Finalmente la regla 1

$= \frac{-3}{16}\, u^{4/3} \; + c$

Volviendo a la variable original "y"

Quitando el cambio de variable

$= \frac{-3}{16} \sqrt[3]{(1-4y)^4} \; + c$

b. Ejercicio ilustrativo 2

Calcular $\int x^2 \; (x^3 \; - 1)^{10}\, dx$ utilizando el cambio de variable.

- **Solución**

$\int x^2 \; (x^3 \; - 1)^{10}\, dx \quad = \int (x^3 \; - 1)^{10}\, x^2 \; dx \; (1)$ Se conmutan los factores colocando el más complejo de primero y el otro factor con el dx

Cambio de variable

Sea $x^3 \; - 1 = \; v \rightarrow 3x^2\, dx = dv \rightarrow x^2\, dx = \; \frac{dv}{3}$

Sustituyendo $v\; y\; dv$ en (1) se tiene

$$= \int v^{10}\; \frac{dv}{3}$$

$$= \frac{v^{11}}{11} \; + c$$

Quitando el cambio de variable

$$= \frac{v^{11}}{11} \; + c$$

$$= \frac{(x^3 - 1)^{11}}{11} \; + c$$

c. Ejercicio ilustrativo 3

Calcular $\int \frac{s}{\sqrt{3s^2 + 1}} ds$ utilizando el cambio de variable.

- **Solución**

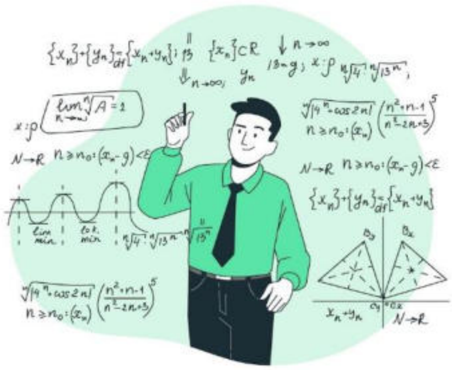
$\int \frac{s}{\sqrt{3s^2 + 1}} ds \qquad = \int \frac{sds}{(3s^2 + 1)^{1/2}}$

Haciendo $3s^2 \; + 1 = x \; \rightarrow 6sds = dx \; \rightarrow sds \; = \; \frac{dx}{6}$

$= \int \frac{\frac{dx}{6}}{x^{1/2}}$

$= \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x^{1/2}}$

$= \frac{1}{6} \int x^{-1/2} \ dx$



$= \frac{1}{6} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c$

$= \frac{1}{6} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$

$= \frac{1}{3} x^{1/2} + c$

Volviendo a la variable original

$= \frac{1}{3} \ (3s^2 \ + 1)^{1/2} \ + c$

$= \frac{1}{3} \ \sqrt{3s^2 \ + 1} \ + c$

d. Ejercicio ilustrativo 4

Calcular $\int Cos(4\theta)d\theta$ utilizando el cambio de variable.

$\int Cos(4\theta)d\theta \quad = \int Cos(4\theta)d\theta$

$Hacemos\ 4\theta = t \Rightarrow 4\, d\theta = dt \Rightarrow d\theta = \frac{dt}{4}$ y sustituyendo en la integral dada

$$= \int Cos(t) \frac{dt}{4}$$

$$= \frac{1}{4} \int Cos(t) \ dt$$

$$= \frac{1}{4}\text{Sen}(t) + c$$

$$= \frac{1}{4}\text{Sen}(4\theta) + c$$

e. Ejercicio ilustrativo 5

Calcular $\int \frac{4\,Sen\,(x)}{(1+Cos(x))^2}\,dx$ utilizando el cambio de variable.

- **Solución**

$\int \frac{4\,Sen\,(x)}{(1+Cos(x))^2}\,dx = 4\int \frac{Sen\,(x)dx}{(1+Cos(x))^2}$ aplicando la regla n°2 se extrae el factor 4

Hacemos $1 + Cos(x) = u \ \rightarrow -Sen(x)dx = du$

Por tanto: $Sen(x)dx = -du$

$$= 4\int \frac{-du}{u^2}$$

$$= -4\int u^{-2}\,du$$

$$= -4 \cdot \frac{u^{-1}}{-1} + c$$

$= \frac{4}{u} + c$ Regresando el cambio se obtiene

$$= \frac{4}{1 + Cos(x)} + c$$

f. Ejercicio ilustrativo 6

Calcular $\int (Tan\,(2x) + Cot\,(2x))^2 dx$

- **Solución**

Desarrollando el producto notable $(Tan\,(2x) + Cot\,(2x))^2$ $se\ tiene$

$(Tan\,(2x) + Cot\,(2x))^2 \quad = \quad Tan^2(2x) + 2Tan\,(2x) \cdot Cot(2x) +$ $Cot^2\,(2x)$

Por la identidad trigonométrica $Tan\theta Cot\theta = 1$por tanto el segundo término se transforma

$$= Tan^2(2x) + 2 \cdot 1 + Cot^2(2x)$$

$$= Sec^2(2x) - 1 + 2 + Csc^2(2x) - 1$$

$$= Sec^2(2x) + Csc^2(2x) - 2 + 2$$

$$= Sec^2\,(2x) + Csc^2(2x)$$

Así la integral original se transforma en

$$\int (Tan(2x) + Cot(2x))^2 dx = \int (Sec^2(2x) + Csc^2(2x))dx$$

Si cambiamos 2x por θ $se\ tiene$

$$2x = \theta \to 2dx = d\theta \to dx = \frac{d\theta}{2}$$

$$= \int (Sec^2\,(\theta) + Csc^2(\theta))\frac{d\theta}{2}$$

$$= \frac{1}{2}[\int (Sec^2(\theta)d\theta + \int Csc^2(\theta))d\theta]$$

$$= \frac{1}{2}\left(Tan(\theta) - Cot(\theta)\right) + c$$

Quitando el cambio se tiene finalmente

$$= \frac{1}{2}\left(Tan(2x) - Cot(2x)\right) + c$$

g. Ejercicio ilustrativo 7

Calcular $\int \frac{e^x - sen(x)}{e^x + cos(x)} dx$ aplicando cambio de variable

Cambio de variable:

- **Solución**

Sea $e^x + cos(x) = r \Rightarrow \left(e^x - sen(x)\right)dx = dr$ que al sustituir en la integral original se obtiene:

$\int \frac{e^x - sen(x)}{e^x + cos(x)} dx \quad = \int \frac{dr}{r} = Ln|r| + c$

$= Ln|r| + c = Ln|e^x + cos(x)|$

h. Ejercicio ilustrativo 8

Calcular $\int \frac{x \cdot Ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1} dx$ aplicando cambio de variable

- **Solución**

Primero reescribimos la integral conmutando los factores

$\int \frac{x \ \ln(x^2+1)}{x^2+1} = \int Ln(x^2+1) \cdot \frac{x}{x^2+1} dx$ y luego realizamos el cambio

Cambio de variable:

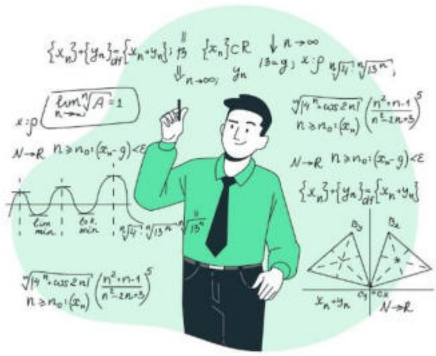
Sea $Ln(x^2+1) = v \Rightarrow \frac{2x}{x^2+1} dx = dv \Rightarrow \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{dv}{2}$ sustituyendo en la integral original se obtiene:

$$\int \frac{x \ \ln(x^2+1)}{x^2+1} = \int Ln(x^2+1) \cdot \frac{x}{x^2+1} dx = \int v \cdot \frac{dv}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int v \cdot dv$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{2} + c$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (x^2+1)^2 + c$$



i. *Ejercicio ilustrativo 9*

Calcular $\int \frac{e^{arcSen(x)}+x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

- **Solución**

La integral original se puede expresar como:

$$\int \frac{e^{arcSen(x)}+x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \left(\frac{e^{\mathrm{arcSen}(x)}}{\sqrt{1\text{-}x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1\text{-}x^2}} \right) dx \text{ Utilizando } \frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$$

$$= \underbrace{\int \frac{e^{\text{arcSen}(x)}}{\sqrt{1\text{-x}^2}}dx}_{I1} + \underbrace{\int \frac{x}{\sqrt{1\text{-x}^2}}dx}_{I2}$$

Resolviendo estas dos integrales por separado se obtiene:

$\text{I1}= \int \frac{e^{\text{arcSen}(x)}}{\sqrt{1\text{-x}^2}}dx$ para I1 el cambio de variable será: $arcSen(x) = u \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du$, por lo cual

$$\text{I1} = \int \frac{e^{\text{arcSen}(x)}}{\sqrt{1\text{-x}^2}}dx$$

$$\text{I1}= \int e^{\text{arcSen}(x)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1\text{-x}^2}}$$

$$\text{I1} = \int e^u \cdot du$$

$$\text{I1} = e^u + C_1$$

$$\text{I1} = e^{arcSen(x)} + C_1$$

$\text{I2}= \int \frac{x}{\sqrt{1\text{-x}^2}}dx$ para I2 el cambio de variable será: $1 - x^2 = v \Rightarrow -2xdx = dv \Rightarrow xdx = \frac{dv}{-2}$ así tenemos que

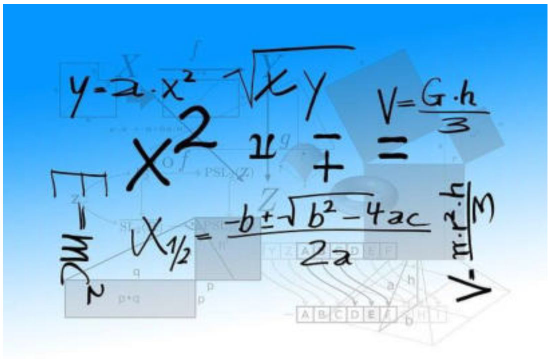
$$\text{I2} = \int \frac{x}{\sqrt{1\text{-x}^2}}dx$$

$$\text{I2}= \int \frac{1}{\sqrt{1-X^2}} \cdot xdx$$

$$\text{I2} = \int \frac{1}{\sqrt{v}} \cdot \frac{dv}{-2} \cdot dv$$

$$\text{I2} = \frac{1}{-2}\int \frac{1}{v^{1/2}} \cdot dv$$

$$I2 = \frac{1}{-2}\int v^{-1/2} \cdot dv$$



$$I2 = \frac{1}{-2}\frac{v^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C_2$$

$$I2 = -v^{1/2} + c_2$$

$$I2 = -\sqrt{v} + c_2$$

$$I2 = -\sqrt{1 - x^2} +$$

La integral original es la suma de I1 e I2:

$$\int \frac{e^{arcSen(x)} + x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = I1 + I2$$

$$= e^{\mathrm{arcSen}(x)} + c_1 - \sqrt{1\text{-x}^2} + c_2$$

$$= e^{\mathrm{arcSen}(x)} - \sqrt{1 - X^2} + C_1 + C_2$$

$$= e^{\mathrm{arcSen}(x)} - \sqrt{1 - X^2} + C$$

j. Ejercicio ilustrativo 10

Calcular $\int x^3(2 - x^2)^{12}dx$

- **Solución**

La integral original se puede expresar como:

Haciendo la descomposición de $x^3 = x^2 . x$ y conmutando los factores

$$\int x^3(2 - x^2)^{12}dx = \int x^2\ (2\text{-x}^2\ )^{12}\ \text{xdx}$$

Ahora haciendo el cambio de variable:

$$2 - x^2 = u \Rightarrow -2xdx = du \Rightarrow xdx$$
$$= -\frac{1}{2}du$$

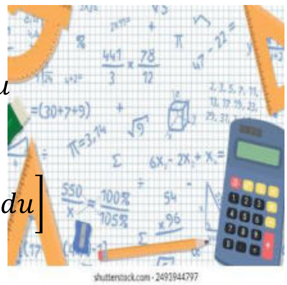
Como $2 - x^2 = u \Rightarrow$ $x^2 = 2 - u$

Que al sustituir en la integral original se obtiene:

$$\int x^3(2 - x^2)^{12}dx = \int x^2\ (2\text{-x}^2\ )^{12}\ \text{xdx}$$

$= -\frac{1}{2}\int (2 - u)u^{12}du$

$$= -\frac{1}{2}\int (2u^{12} - u^{13})du$$



$$= -\frac{1}{2}\left[2\int u^{12}du - \int u^{13}du\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{13}u^{13} - \frac{1}{14}u^{14}\right] + c$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{182}u^{13}(28 - 13u) + c$$

$$= -\frac{1}{364}(2 - x^2)^{13}\left(28 - 13(2 - x^2)\right) + c$$

$$= -\frac{1}{364}(2 - x^2)^{13}(2 + 13x^2) + c$$

k. Ejercicio ilustrativo 11

Calcular $\int \sqrt{1 - 4y}dy$

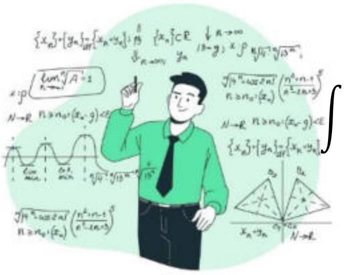
- **Solución**

Haciendo el cambio de variable, se obtiene:

$$u = 1\text{-}4\text{y}$$

$$\text{du} = -4\text{dy}$$

$$-\frac{\text{du}}{4} = dy \quad \int \sqrt{1-4y}dy = \int (1+4y)^{\frac{1}{2}}dy$$



$$\int \sqrt{1-4y}dy = -\frac{1}{4}\int u^{\frac{1}{2}}du$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)u^{\frac{3}{2}}$$

$= -\frac{1}{6}(1-4y)^{\frac{3}{2}}$ Regresando el cambio se obtiene

l. Ejercicio ilustrativo 12

Calcule $\int \frac{\ell^{2t}dt}{3+\ell^{2t}}$ aplicando cambio de variable

- **Solución**

Haciendo el cambio de variable, se puede redefinir la integral

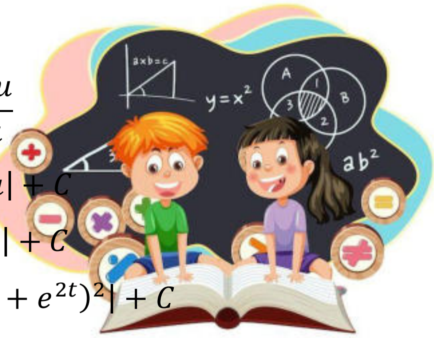
$$u = 3 + e^{2t}$$

$$du = 2e^{2t}dt$$

$$\frac{du}{2} = e^{2t}dt$$

$\int \frac{\ell^{2t} dt}{3+\ell^{2t}} = \int \frac{2du}{u}$

$$= 2\int \frac{du}{u}$$
$$= 2Ln|u| + C$$
$$= Ln|u^2| + C$$
$$= Ln|(3 + e^{2t})^2| + C$$



m. Ejercicio ilustrativo 13

Calcule $\int \sqrt[3]{6-2x}dx$ utilizando el cambio de variable

- **Solución**

Haciendo el cambio de variable y transformando la raíz como potencia se puede redefinir la integral

$$u = 6 - 2x$$
$$du = -2dx$$
$$\frac{du}{-2} = dx \qquad \int (6-2x)^{1/3} dx = \int u^{\frac{1}{3}} \frac{du}{-2}$$

Posteriormente aplicado las reglas 2 y 1 se resuelve la integral como inmediata

$$= -\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}}\, du$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right) + C$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(u^{\frac{4}{3}}\right) + C$$

$$= -\frac{3}{8}(6-2x)^{\frac{4}{3}} + C$$

n. Ejercicio ilustrativo 14

Calcule $\int \frac{\left(r^{1/3}+2\right)^4}{\sqrt[3]{r^2}}dr$ aplicando cambio de variable

- **Solución**

Haciendo el cambio de variable y transformando la raíz como potencia se puede redefinir la integra:

$$u = r^{1/3} + 2$$

$$u = \frac{1}{3} r^{-2/3} dr$$

$$3du = \frac{dr}{r^{2/3}}$$

$$\int \frac{\left(r^{1/3}+2\right)^4}{r^{2/3}} dr = \int (u)^4 \times 3du$$

$$= 3 \times \frac{u^5}{5} + C$$

$$= \frac{3\left(r^{1/3}+2\right)^5}{5} + C$$

o. Ejercicio ilustrativo 15

Calcule $\int x\sqrt{x^2 - 9}\ dx$

- **Solución**

$$\int x\sqrt{x^2 - 9}\ dx = \int \sqrt{x^2-9}\,xdx \qquad u = x^2 - 9$$

$$u = 2xdx$$

$$\frac{du}{2} = xdx$$

$$= \int u^{1/2} \left(\frac{du}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{u^{3/2}}{3/2}$$

$$= \frac{u^{3/2}}{3} + C$$

$$= \frac{(x^2-9)}{3} + C$$

p. *Ejercicio ilustrativo 16*

Calcule $\int sen\ \left(\frac{1}{3}x\right) dx$

- **Solución**

$$\int sen\ \left(\frac{1}{3}x\right) dx = 3\cos\left(\frac{1}{3}x\right) + C \rightarrow \text{ Regla } \int sen\ \left(\frac{1}{a}x\right) dx = a\cos\left(\frac{1}{a}x\right) + C$$

q. *Ejercicio ilustrativo 17*

Calcule $\int x\sqrt{4-x^2}\ dx$

- **Solución**

$$\int \sqrt{4-x^2}\, x\, dx \quad = \quad \int \sqrt{u}\left(\frac{du}{-2}\right)$$

$$= \int u^{\frac{1}{2}}\left(\frac{du}{-2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)u^{\frac{3}{2}} + C$$

$= -\frac{1}{3}(4 - x^2)^{\frac{3}{2}} + C$ $\qquad u = 4 - x^2$

$$du = -2xdx$$

$$\frac{du}{-2} = xdx$$

r. Ejercicio ilustrativo 18

Calcule $\int 6x^2 sen\,(x^3)\ dx \quad = \quad 6\int sen\,(x^3)\,\mathrm{x}^2\mathrm{dx}$

- **Solución**

$$\int 6x^2 sen\,(x^3)\ dx$$

$$= \ 6\int sen\,(x^3)\,\mathrm{x}^2\mathrm{dx}$$

$$u = x^3$$

$$du = 3x^2dx$$

$\frac{du}{3} = x^2dx$ $\qquad =$

$$6\int sen(u)\,\frac{du}{3}$$

$$= 6\left(\frac{1}{3}\right)\int sen(u)\,du$$

$$= 2\int sen(u)\,du$$

$$= -2\,cos(x^3) + C$$

s. Ejercicio ilustrativo 19

Calcule $\int x\,(2x^2+1)^6\,dx$

- **Solución**

$$\int (2x^2+1)^6\,xdx \quad = \int u^6\left(\frac{du}{4}\right)$$

$$\underline{\boldsymbol{u = 2x^2 + 1}}$$

$$\underline{\boldsymbol{du = 4xdx}}$$

$\underline{\boldsymbol{\frac{du}{4} = xdx}}$ $\qquad = \frac{1}{4}\int u^6\,du$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{u^7}{7}\right) + C$$

$$= \frac{1}{28}(2x^2+1)^7 + C$$

t. Ejercicio ilustrativo 20

Calcule $\int \frac{1}{2}\,cos\,(4t^2)dt$

$$\int \frac{1}{2}\,cos\,(4t^2)dt = \frac{1}{2}\int cos\;(u)\frac{du}{8}$$

$$u = 4t^2$$

$$du = 8tdt$$

$\frac{du}{8} = tdt$ $\qquad =$

$$\frac{1}{16}\int cos(u)\,du$$

$$= \frac{1}{16}sen(u) + C$$

$$= \frac{1}{16} sen(4t^2) + C$$

u. Ejercicio ilustrativo 21

Calcule $\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3}\ dx$

- **Solución**

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3}\ dx = \int \frac{1}{u^3} \times \frac{du}{2}$$

$$u = x^2 + 1$$

$$du = 2xdx$$

$\frac{du}{2} = xdx$ $\qquad = \frac{1}{2} \int u^{-3}\,du$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{-4}}{-4}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{8} u^{-4} + C$$

$$= -\frac{1}{8} (x^2 + 1)^{-4} + C$$

v. Ejercicio ilustrativo 22

Calcule $\int r^2\, sec^2\ \ (r^3)\ dr$

- **Solución**

$$\int r^2\, sec^2\ \ (r^3)\ dr = \int sec^2(u) \frac{du}{3}$$

$$u = r^3$$

$$du = 3r^2dr$$

$\frac{du}{3} = r^2dr$ $=$

$$\frac{1}{3}\int sec^2(u)\,du$$

$$= \frac{1}{3}tan(u) + C$$

$$= \frac{1}{3}tan(r^3) + C$$

w. Ejercicio ilustrativo 23

Calcule

$$\int 5x\sqrt[3]{(9-4x^2)^2}\,dx$$

$$= 5\int\sqrt{(9-4x^2)^2}\,dx$$

$$u = 9 - 4x^2$$

$$du = 8xdx$$

$$\frac{du}{8} = xdx = 5\int\sqrt{(u)^2}\,\frac{du}{8}$$

$$= \frac{5}{8}\int[(u)^2]^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{5}{8}\int udu$$

$$= \frac{5}{8}\frac{u^2}{2} + C$$

$= \frac{5}{16}(9-4x^2)^2 + C$

x. Ejercicio ilustrativo 24

Calcule $\int sc^2\ (2\theta)\ d\theta$

- **Solución**

Según la tabla de integrales establecidas previamente se tiene que $\int sen\ (ax)dx = \frac{1}{a}\cos(ax) + C$ y aplica para todas las razones trigonométricas $\int sc^2\ (2\theta)\ d\theta\ = -\frac{1}{2}\cot(2\theta) + C$

y. Ejercicio ilustrativo 25

Calcule $\int (x^2 - 4x + 4)^{4/3} dx$

- **Solución**

Factorizamos el polinomio del paréntesis aplicando el método del tanteo reducimos el factor

$$\int (x^2 - 4x + 4)^{4/3} dx = \int \lfloor (x-2)(x-2) \rfloor^{8/3}\, dx$$

$$\int (x^2 - 4x + 4)^{4/3} dx = \int \lfloor (x-2) \rfloor^{8/3}\, dx$$

Luego realizamos el cambio $u = x - 2$

$du = dx$

$$\int (x^2 - 4x + 4)^{4/3} dx = \int (x-2)^{8/3}\, dx$$

$$\int (x^2 - 4x + 4)\, dx = \int (u)^{\frac{3}{2}}\, du$$

$$\int (x^2 - 4x + 4)\, dx = \frac{2}{5}(u)^{\frac{5}{2}} + C$$

$$\int (x^2 - 4x + 4)\,dx = \frac{2}{5}(x-2)^{\frac{5}{2}} + C$$

4.1.2. Ejercicios propuestos

Tabla 8. Ejercicios propuestos.

	Integral	Respuesta		Integral	Respuesta
1.	$\int Sen(2x)\sqrt{2-Cos(2x)}dx$	$\frac{1}{3}[2 - Cos(2x)]^{3/2} + c$	2.	$\int e^{Sen(x)}Cos(x)dx$	$e^{Sen(x)} + c$
3.	$\int \frac{y^3dy}{(1-2y^4)^5}$	$\frac{1}{32(1-2y^4)^4} + c$	4.	$\int yCsc(3y^2)Cot(3y^2)dy$	$-\frac{1}{6}Csc(3y^2) + c$
5.	$\int \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$	$arcSen(x^2) + c$	6.	$\int Cos(x)(2 + Sen(x))^5dx$	$\frac{1}{6}[2 + Sen(x)]^6 + c$
7.	$\int \sqrt[3]{3x-4}dx$	$\frac{1}{4}(3x-4)^{4/3} + c$	8.	$\int \frac{dx}{Cos^2(x)\sqrt{9-Tan^2(x)}}$	$arcSen\left(\frac{Tan(x)}{3}\right) + c$
9.	$\int \sqrt{1+\frac{1}{3x}}\frac{dx}{x^2}$	$-2\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3/2} + c$	10.	$\int \frac{4Sen(x)dx}{(1+Cos(x))^2}$	$\frac{4}{1+Cos(x)} + c$
11.	$\int \frac{(6x^2+8x)dx}{(x^3+2x^2+1)^3}$	$\frac{1}{(x^3+2x^2+1)^2} + c$	12.	$\int \frac{Cos\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}dx$	$2Sen\sqrt{1+x} + c$
13.	$\int (x^3+3)^{1/4}x^5dx$	$\frac{4}{135}(x^3+3)^{5/4}(5x^2 - 12) + c$		14. $\int \frac{2rdr}{(1-r)^2}$	$\frac{6}{15}(6r - 1)(1-r)^{-6} + c$
15.	$\int \frac{(y+3)dy}{(3-y)^{2/3}}$	$-\frac{3}{4}(y+21)(3-y)^{1/3} + c$		16. $\int \frac{tdt}{\sqrt{t+3}}$	$-\frac{2}{3}(t - 6)(t+3)^{1/2} + c$

4.2. Integración por partes

Entre las aplicaciones más importantes del método de integración por parte se encuentra la integración de:

- Diferenciales que contienen productos.
- Diferenciales que contienen logaritmos
- Diferenciales que contienen Funciones Trigonométricas Inversas

Si u y v son funciones de la misma variable independiente se tiene que $\int udv = uv - \int vdu$, la cual es llamada fórmula de integración por partes. Esta fórmula expresa la $\int udv$ en términos de otra integral $\int vdu$ la cual es más fácil de evaluar. Para evaluar cualquier integral por este método se debe elegir un cambio para $u\, y\, dv$, por lo general es recomendable que el dv sea el factor más complicado del integrando. Otra recomendación es la siguiente regla para la elección de u.

L = Logarítmica.

I = Trigonométrica Inversa

A = Algebraica

T = Trigonométrica Directa E = Exponencial

4.2.1. Ejercicios ilustrativos

a. Ejemplos ilustrativos 1

$$\int e^x Cosxdx$$

En este caso, se encuentran en la integral el factor trigonométrico directa y la exponencial, en tal sentido la primera prioridad es Trigonométrica por lo que:

$$u = Cosx$$

$$du = -Senxdx \qquad\qquad dv = e^x dx$$

$$v = e^x$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes se tiene:

$$\int e^x Cosxdx = e^x Cosx - \int -e^x Senxdx$$

$$. \qquad = e^x Cosx + \int e^x Senxdx$$

$$= e^x Cosx + \left[e^x Senx - \int e^x Cosxdx \right]$$

Para resolver la integral $\int \ e^x \ Sen(x)dx$ usamos también la técnica de integración por partes, para lo cual aplicamos la regla LIA(T)E

$$u = Senx$$

$$du = Cosxdx \qquad\qquad dv = Senxdx$$

$$v = -Cosx$$

Por lo cual;

$$\int e^x Cosxdx = e^x Cosx + \left[e^x Senx - \int e^x Cosxdx \right]$$

$$\int e^x Cosxdx = e^x Cosx + e^x Senx - \int e^x Cosxdx$$

Cuando en la solución se repite la integral dada se puede concluir agrupando los términos semejantes

$\int e^x Cosxdx + \int e^x Cosxdx = e^x Cosx + e^x Senx$

$$2\int e^x Cosxdx = e^x Cosx + e^x Sen.$$

$$\int e^x Cosxdx = \frac{1}{2}(e^x Cosx + e^x Senx)$$

b. Ejercicio ilustrativo 2

Calcular $\int \frac{\chi^3}{\sqrt{1-\chi^2}}dx$

Observe que: para resolver la integral debemos descomponer en dos factores el numerador.

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{x^2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Utilizando la regla LI(A)TE para seleccionar el cambio tiene que la primera prioridad es Algebraica por lo que:

$$u = x^2 \qquad\qquad dv = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$du = 2xdx \qquad\qquad \int dv = \int \frac{xdx}{\sqrt{\underbrace{1-x^2}}} \qquad \text{(A)}$$

Para resolver la integral (A) se hace el cambio de variable

$$1 - x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt = \frac{dt}{-2} = xdx$$

Por lo que:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\frac{dt}{-2}}{\sqrt{t}} = \frac{-1}{2}\int t^{\frac{-1}{2}}\,dt$$

$$= \frac{-1}{2}.\frac{t^{\frac{1}{2}}}{1/2} = -\sqrt{t}$$

$$= \sqrt{1-x^2}$$

Lo cual se simplifica en:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = u.v - \int v.du$$

$$= x^2\sqrt{1-x^2} - \int -\sqrt{1-x^2}\,.2xdx$$

$$= x^2\sqrt{1-x^2} - \int \underbrace{(1-x^2)^{1/2}}.2xdx$$

(B)

La integral (B) será resuelta en forma análoga a la integral (A) por un cambio de variable siendo $w = 1 - x^2 \Rightarrow dw = -2xdx$ así

$$\int \sqrt{1-x^2}2xdx = \int .\sqrt{w}(-dw)$$

$$= \int -w^{\frac{1}{2}}\,dw$$

$$= -\frac{2}{3}w^{3/2} + c$$

$$= -\frac{1}{3}.\sqrt{(1-x^2)^3} + c$$

Volviendo a la expresión (B) se tiene:

$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = u.v - \int v.du$

$$\boldsymbol{= x^2\sqrt{1-x^2} - \left(-\frac{2}{3}.\sqrt{(1-x^2)^3}\right) + c}$$

$$\boldsymbol{= \sqrt{1-x^2}.\left[x^2 + \frac{2}{3}(1-x^2)\right] + c}$$

$$\boldsymbol{= \sqrt{1-x^2}.\left[x^2 + \frac{2}{3}(1-x^2)\right] + c}$$

$$= \sqrt{1-x^2}.\left[x^2+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x^2\right]+c$$

$$\sqrt{1-x^2}.\left[\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}\right]+c$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}.(x^2+2)+c$$

c. Ejercicio ilustrativo 3

Calcular $\int x.arctg(x)dx$

Siguiendo la regla L(I)ATE se tiene que el cambio más indicado para u es Trigonométrica inversa por lo que:

$$u = artg(x) \qquad dv = xdx$$

$du = \frac{dx}{x^2+1}$ $\qquad \int dv = \int xdx$ Entonces, $v = \frac{x^2}{2}$

Luego la integral original al aplicar la fórmula de integración por partes quedará como sigue:

$$\int xarctg(x)dx = u.v - \int v.du$$

$$= \frac{1}{2}x^2arctg(x) - \int \frac{1}{2}.\frac{x^2}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2arctg(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2arctg(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2 arctg(x) - \int \frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{-1}{x^2+1} dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}[x^2 arctg(x)$$

$$- \int \left(1' + \frac{-1}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2 arctg(x) - \int \left(1 + \frac{-1}{x^2+1}\right) dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2 arctg(x) - \int x dx + \int \frac{dx}{x^2+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[x^2 arctg(x) - x + arctg(x) + c]$$

d. Ejercicio ilustrativo 4

Calcular $\int x.Sen^2(3x)\, dx$

- **Solución**

Observe que si utilizamos la identidad trigonométrica que establece que $Sen^2(x) = \frac{1}{2}[1 - Cos(2x)]$ podemos resolver de mejor forma la integral.

$$\int x.sen^2(3x)dx = \int x\left[\frac{1}{2}(1 - cos(6x))\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int xdx - \int x\, cos(6x)\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int xdx - \int x\, cos(6x)\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int xdx - \frac{1}{2}\int x\, cos(6x)\, dx$$

$$= \frac{x^2}{4} - \underbrace{\frac{1}{2}\int x\, cos(6x)\, dx}$$

La integral I1 se resuelve usando el método de integración por partes Siguiendo la regla LI(A)TE se tiene que el cambio más indicado para u es Trigonométrica inversa por lo que:

$$u = x$$

$$du = dx \qquad\qquad dv = cos(6x)\,dx$$

$$\int dv) = \int cos(6x)\,dx$$

$$6x = z$$

$$6xdx = \frac{dz}{6}$$

$$dx\frac{dz}{6}$$

$$\int dv = \int cos(z)\frac{dz}{6}$$

$$\int dv = \frac{1}{6}\int cos(z)\,dz$$

$$v = sen(z)$$

$$v = \frac{1}{6}sen(6x)$$

Resolviendo la integral I1 al aplicar la fórmula de integración por partes quedará como sigue:

$$\frac{1}{2}\int x\,cos(6x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{xsen(6x)dx}{6} - \frac{1}{6}\int sen(6x)dx\right]$$

$$\frac{1}{2}\int x\,cos(6x)\,dx = \frac{1}{12}\left[xsen(6x) - \int sen(6x)dx\right]$$

$$6x = r$$

$$6dx = dr$$

$$dx = \frac{dr}{6}$$

$$= \frac{1}{12}xsen(6x) - 1\frac{1}{12}\int sen(r)\frac{dr}{6}$$

$$= \frac{1}{12}xsen(6x) - \frac{1}{72}\int sen(r)dr$$

$$= \frac{1}{12}xsen(6x) + \frac{1}{72}cos(6x)$$

$$\int xSen^2(3x)dx = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\int x\cos(6x)\,dx$$

$$\int xSen^2(3x)dx = \frac{x^2}{4} - \left[\frac{1}{12}xsen(6x) + \frac{1}{72}cos(6x)\right] + c$$

$$\int xSen^2(3x)dx = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{12}xsen(6x) - \frac{1}{72}cos(6x) + c$$

$$\int xSen^2(3x)dx = \frac{1}{72}[18x^2 - 6xsen(6x) - cos(6x)] + c$$

e. Ejercicio ilustrativo 5

Calcular la integral $\int xe^{3x}dx$

- **Solución**

Identificar u y du

Elige las partes de la integral de manera que sea fácil de derivar y de integrar, las cuales según el LIATE la algebraica debe ser u y el resto debe ser dv.

$$u = x$$
$$du = x$$
$$dv = e^{3x}dx$$

Integramos dv *utilizando la tabla* $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$ para obtener:

$$v = \frac{1}{3}e^{3x}$$

Sustituimos los valores en la fórmula de integración por partes:

$$\int udv = u.v - \int vdu$$
$$\int xe^{3x}\,dx = x.\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}dx$$

Simplificamos el primer término y resolvemos la integral restante

$$= \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx$$

La integral de

$$= \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}.\frac{1}{3}e^{3x}$$
$$= \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}$$

simplificamos sacando factor común y el resultado final es:

$$\int xe^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}\left(x - \frac{1}{3}\right) + c$$

f. Ejercicio ilustrativo 6

Calcular la integral $\int ln[x]\, dx$

- **Solución**

Identificar u y dv

Para resolver $\int \ln x\, dx$ elegimos $u = \ln x$ porque es la función que se simplifica al derivarla, y $dv = dx$ para integrar, siguiendo la recomendación del LIATE

$$u = ln[x]$$

$$du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = dx$$

$$v = x$$

Sustituimos los valores en la fórmula de integración por partes:

$$\int udv = u.v - \int vdu$$

$$\int ln(x)\, dx = x\, ln(x) - \int x.\frac{1}{x}\, dx$$

Resolvemos la integral

$$\int 1dx = x + c$$

Sustituimos la integral y por lo tanto este es el resultado

$$\int ln(x)\, dx = x\, ln(x) - x + c$$

$$\int ln(x)\, dx = x[ln(x) - 1] + c$$

g. Ejercicio ilustrativo 7

Calcular la integral $\int xsen(x)dx$

- **Solución**

Identificar u y dv

Elige las partes de la integral de manera que sea fácil de derivar y de integrar.

$$u = x$$
$$du = dx$$

$$\int dv = \int sen(x)dx$$
$$v = -\cos(x)$$

Sustituimos los valores en la fórmula de integración por partes:

$$\int udv = u.v - \int vdu$$

$$\int xsen(x)dx$$

$$= -x\cos - \int -\cos(x)\, dx$$

$$\int xsen(x)dx = -x\cos + Senx + c$$

h. Ejercicio ilustrativo 8

Calcular la integral $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$

- **Solución**

Llamamos $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$

De igual forma denotamos como

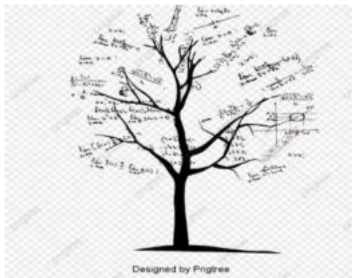
$$\int dv = \int \frac{xdx}{(x+1)^2} \Rightarrow y = x+1 \Rightarrow dy = dx$$

$$y = x+1 \Rightarrow x = y-1$$

$$v = \int \frac{y-1}{y^2} dy$$

$$v = \int \frac{y}{y^2} dy - \int \frac{1}{y^2} dy$$

$$v = Lny + \frac{1}{y}$$



Entonces, la integral se convierte en:

$$\int \frac{xe^x dx}{(x+1)^2} = e^x \left[Ln(x+1) + \frac{1}{x+1}\right] - \int e^x Ln(x+1)dx - \int \frac{e^x dx}{(x+1)}$$

Ahora resolviendo la I1:

$\int e^x Ln(x+1)dx = e^x Ln(x+1) - \int \frac{e^x dx}{(x+1)}$, donde $dv = e^x dx \Rightarrow$

$$v = e^x$$

$$u = Ln(x+1)$$

$$du = \frac{dx}{x+1}$$

Ahora sustituyendo:

$$\int \frac{xe^x dx}{(x+1)^2} = e^x \left[Ln(x+1) + \frac{1}{x+1}\right] - \left[e^x Ln(x+1) - \int \frac{e^x dx}{(x+1)}\right] - \int \frac{e^x dx}{(x+1)}$$

$$\int \frac{xe^x dx}{(x+1)^2} = e^x Ln(x+1) + \frac{e^x}{x+1} - e^x Ln(x+1) + \int \frac{e^x dx}{(x+1)} - \int \frac{e^x dx}{(x+1)}$$

$$\int \frac{xe^x dx}{(x+1)^2} = \frac{e^x}{x+1} + c$$

i. Ejercicio ilustrativo 9

Calcular la integral $\int \frac{Ln(x)}{x^2} dx$

- **Solución**

Para resolver esta integral, utilizaremos integración por partes.

Elegimos:

$$u = Lnx$$

$$du = \frac{dx}{x} \quad \wedge \quad dv = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{x}$$

La fórmula de integración por partes es:

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu$$

Sustituyendo los valores de $u, dv, v\ y\ du$ en la formula tenemos:

$$\int \frac{lnx}{x^2}dx = -\frac{lnx}{x} - \int -\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx$$

Simplificando el signo negativo en la segunda integral:

$$\int \frac{Lnx}{x^2}dx = -\frac{Lnx}{x} + \int \frac{dx}{x^2}$$

$$\int \frac{Lnx}{x^2}dx = -\frac{Lnx}{x} - \frac{1}{x} + c$$

$$\int \frac{Lnx}{x^2}dx = -\frac{1}{x}(Lnx + 1) + c$$

j. *Ejercicio ilustrativo 10*

Calcular la integral $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

- **Solución**

Primero redefinimos $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{x^2 \cdot x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ descomponiendo en factores en numerador para garantizar que nuestra dv sea una integral por cambio de variable. Así, utilizando la regla LI(A)TE para seleccionar el cambio, se tiene que la primera prioridad es algebraica por lo que:

$$u = x^2$$

$$du = 2xdx$$

$$\int dv = \left.\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}\right\} A$$

Para resolver la integral (A) se hace cambio de variable por lo que $t = 1 - x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$ y finalmente quedaría $\frac{dt}{-2} = xdx$ por lo cual la expresión queda como:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\frac{dt}{-2}}{\sqrt{t}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int t^{-1/2}dt$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= -t^{1/2}$$

$$= -\sqrt{t} - \sqrt{1-x^2}$$

$$= -\sqrt{1-x^2}$$

Se procede a aplicar la fórmula de la integración por partes

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -x^2\sqrt{1-x^2} - \int -\sqrt{1-x^2} \cdot 2xdx$$

$$= -x^2\sqrt{1-x^2} + \underbrace{\int \sqrt{1-x^2} \cdot 2xdx}_{\text{B}}$$

La integral (B) será resuelta en forma análoga a la integral (A) por un cambio de variable, siendo $w = 1 - x^2 \quad y \quad dw = 2xdx$, resolviendo la expresión quedaría:

$$\int \sqrt{1-x^2}2xdx = \int -\sqrt{wdw}$$

$$= -\int w^{1/2}dw$$

$$= -\frac{2}{3}w^{3/2}$$

$$= -\frac{2}{3}(1 - x^2)^{3/2}$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt[3]{(1 - x^2)^3}$$

Volviendo a la integración general y cambiando los datos obtenidos, tenemos:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1 - x^2}} = -x^2\sqrt{1 - x^2} - \int -\sqrt{1 - x^2} \cdot 2xdx$$

$$= -x^2\sqrt{1 - x^2} + \int \sqrt{1 - x^2} \cdot 2xdx$$

$$= -x^2\sqrt{1 - x^2} - \frac{2}{3}\sqrt[3]{(1 - x^2)^3} + C$$

$$= -\sqrt{1 - x^2}\left[x^2 + \frac{2}{3}\sqrt[3]{(1 - x^2)^3}\right] + C$$

k. Ejercicio ilustrativo 11

Calcular la integral $\int x^2\, e^x dx$

- **Solución**

Se procede a de definir $u, du, v\ y\ dv$

$$u = x^2 \qquad du = 2xdx$$

$$v = e^x \qquad dv = e^x$$

Se procede con la sustitución en la fórmula de integración por partes

$$\int x^2\, e^x dx = x^2 e^x - \int e^x \cdot 2xdx$$

$$= \int xe^x dx$$

$$= x^2e^x - 2\left[xe^x - \int e^x dx\right]$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + e^x + c$$

l. Ejercicio ilustrativo 12

Calcular la integral $\int$ $\mathrm{x}^3 e^{\text{-x}^2}: dx$

Se transforma la expresión descomponiendo $x^3 \ = \ x^2.x$, y utilizando $x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt$ y se integra por partes

$$\int \ \mathrm{x}^2 e^{\text{-x}^2}\mathrm{x}: dx = \int \frac{te^{-t}}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2}\int te^{-t}dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(t(-e^{-e}) - \int -e^{-e}dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}(t(-e^{-e}) - e^{-e})$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\left(-e^{-x^2}\right) - e^{-x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2 + 1) + C$$

m. Ejercicio ilustrativo 13

Calcular la integral $\int x^2 e^{-x} dx$

- **Solución**

Este ejercicio tiene similitud con el ejercicio ilustrativo 10, por lo que se procede a realizar los mismos pasos.

$$u = x^2 \qquad du = 2xdx$$
$$dv = e^{-x}dx \qquad v = -e^{-x}$$

$$\int x^2e^{-x}dx \quad = x^2(-e^{-x}) - \int -e^{-x}2xdx$$
$$= x^2(-e^{-x}) - 1(-2)\int e^{-x}xdx$$
$$=^2 (-e^{-x}) + 2\left(x(-e^{-x}) + \int e^{-x}dx\right)$$
$$= x^2(-e^{-x}) + 2(x(-e^{-x}) - e^{-x})$$
$$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$$

n. *Ejercicio ilustrativo 14*

Calcular la integral $\int xSen^2(3x)dx$

- **Solución**

Se preparan los datos para empezar a integrar por partes

$$u = x \qquad du = dx$$
$$dv = Sen^2(3x)dx \qquad v = \frac{1}{2}\cdot\frac{Sen(6x)}{12}$$

Integramos por medio de las reglas conocidas

$$\int xSen(3x)^2dx = x\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{Sen(6x)}{12}\right) - \int\frac{1}{2}\cdot\frac{Sen(6x)}{12}dx$$
$$= x\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{Sen(6x)}{12}\right) - \left[\int\frac{1}{2}xdx - \int\frac{Sen(6x)}{12}dx\right]$$
$$= x\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{Sen(6x)}{12}\right) - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{Cos(6x)}{72}\right)$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{Sen(6x)}{12} - \frac{Cos(6x)}{72} + C$$

4.2.2. Ejercicios propuestos

Tabla 9. Ejercicios propuestos.

Nº	Integral	Respuesta
1	$\int ySec^2ydy$	$yTany + Ln\|Cosy\| + C$
2	$\int SenxLn(Cosx)dx$	$Cosx(1 - Ln\|Cosx\|) + C$
3	$\int e^x Cosxdx$	$\frac{1}{2}e^x(Cosx + Senx) + C$
4	$\int xSen\frac{x}{2}dx$	$4Sen\frac{x}{2} - 2xCos\frac{x}{2} + C$
5	$\int (Ln\|x\|)^2dx$	$xLn^2x - 2xLnx + 2x + C$
6	$\int xCsc^2xdx$	$-xCotx + Ln\|Senx\| + C$

4.3. Integración de potencias del seno y el coseno

Este método de integración se utiliza para integrales que contiene expresiones de la forma $\int \mathrm{Sen}^{\mathrm{n}}(u)du$ ó $\int Cos^n(u)du$; donde $n \neq 1$ y $n \neq 0$, ya que en el caso de que sea 1 ó 0 (cero) la integral se resuelve por tabla. Esto nos da la idea que el método aplica para integrales con n = 2 en adelante y se dividen en 4 casos según la paridad de n

4.3.1. Caso 1

$\int \mathrm{Sen}^{\mathrm{n}}(u)du$ ó $\int Cos^{n}(u)du$; donde n es un entero Impar

Se descompone n en (n – 1) y 1; para el exponente par (n–1) se usa la fórmula $Sen^2\,(x)\;=\;1\text{–}Cos2(x)$ ó $Cos^2\,(x)\;=\;1\text{–}Sen^2(x)$ y la función trigonométrica elevada al exponente 1 se agrupa con el diferencial.

a. Ejercicio ilustrativo 1

Calcular $\int Sen^3(x)dx$

- **Solución**

Para la solución como n es impar se descompone $Sen^3(x) = Sen^2(x) \bullet Sen(x)$

$\int \boldsymbol{Sen^3}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} = \int \boldsymbol{Sen^2x\,.Senxdx}$

Luego se hace $\boldsymbol{u = Cosx \Rightarrow du = -Senxdx}$

$$= \int \boldsymbol{(1 - Cos^2x)Senxdx}$$

$$= \int \boldsymbol{(1 - u^2)(-du)}$$

$$= \int \boldsymbol{-du} + \int \boldsymbol{u^2du}$$

$$= \boldsymbol{-u + \frac{u^3}{3} + c}$$

$$= -\boldsymbol{Cosx} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{Cos^3x} + \boldsymbol{c}$$

b. Ejercicio ilustrativo 2

Calcular $\int Sen^5(x)dx$

- **Solución**

Observe que esta integral es similar a la anterior, por tanto, se resuelve de igual forma.

$$\int Sen^5(x)\,dx \quad = \int Sen^4(x) \cdot Sen^2(x)\,dx$$

$$= \int [Sen^2(x)]^2 \cdot Sen^2(x)\,dx$$

$$= \int [1 - Cos^2(x)]^2 \cdot Sen(x)dx$$

Luego el exponente 4 se descompone para que se pueda aplicarla identidad trigonométrica del método

Hagamos el siguiente cambio de variable

Sea $cos(x) = u \implies -sen(x)dx = du\; sen(x)\,dx = -du$

$$= \int (1 - u^2)^2(-du)$$

$$= \int (1 - 2\mathrm{u}^2 + u^4) \cdot (-du)$$

$$= \int -du + 2\int u^2du - \int u^4du$$

$$= -u + \frac{2}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 + C$$

Volviendo a la variable inicial x tenemos

$$\int Sen^5(x)dx$$

$$= -Cos(x) + \frac{2}{3}Cos(x)^3 - \frac{1}{5}Cos(x)^5 + C$$

c. *Ejercicio ilustrativo 3*

Calcular $\int Cos^3(3x)dx$

- **Solución**

Observe que la integral es idéntica a el ejemplo 1 con la diferencia de que ahora es Cos(x), por tanto, por semejanza se resuelve igual.

$$\int Cos^3(3x)dx \;\; = \int Cos^2(3x) \cdot Cos(3x)dx$$

$$= \int [1 - Sen^2(3x)] \cdot Cos(3x)dx$$

Hagamos el siguiente cambio de variable

Sea Sen(3x) = v ⇒ 3Cos(3x) dx =dv ⇒Cos(3x)dx = $\frac{dv}{3}$

$$= \int (1 - v^2) \cdot \frac{dv}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\int dv - \int v^2 dv\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[v - \frac{v^3}{3}\right] + C$$

Volviendo a la variable inicial x tenemos

$$=\frac{1}{3}\left[Sen(3x)-\frac{1}{3}Sen^3(x)\right]+C$$

4.3.2. Caso 2

$\int Sen^n(u)du$ ó $\int Cos^n(u)du$ donde n es un entero par

Se usan las fórmulas:

$\mathrm{Sen}^2(\mathrm{x}) = {}^1\!/_2 \cdot [1-\mathrm{Cos}(2\mathrm{x})]$; $\mathrm{Cos}^2(\mathrm{x}) = {}^1\!/_2 \cdot [1-\mathrm{Cos}(2\mathrm{x})]$

a. Ejercicio ilustrativo 1

Calcular $\int Cos^2(\frac{x}{2})\,dx$

- **Solución**

$$\int Cos^2(\frac{x}{2})\,dx = \int\left[\frac{1}{2}(1+\mathrm{Cos}2\left(\frac{x}{2}\right))\right]\,\mathrm{dx}$$

$$=\frac{1}{2}\int(1+\mathrm{Cos}(\mathrm{x}))\,\mathrm{dx}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int dx+\int Cos(x)\,dx\right]$$

$$=\int\left[\frac{1}{2}\big(1+Cos(x)\big)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int\big(1+Cos(x)\big)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int dx + \int Cos(x)dx\right]$$

$$\frac{1}{2}[x + Sen(x)] + C$$

b. *Ejercicio ilustrativo 2*

Calcular $\int Sen^4\,(3x)dx$

- **Solución**

$$\int Sen^4\,(3x)dx \quad = \int [Sen^2(3x)]^2\,dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{2}\big(1 - Cos(6x)\big)\right]^2 dx$$

$$= \int \frac{1}{2}\left[\big(1 - Cos(6x)\big)\right]^2 \text{dx}$$

$$= \frac{1}{4}\int \big(1 - Cos(6x)\big)^2 \text{ dx (A)}$$

Sea 6x = θ ⇒ 6dx == d θ ⇒ dx = $\frac{d\theta}{6}$ Sustituyendo la (A) se tiene

$$\int Sen^4\,(3x)dx = \frac{1}{4}\int \big(1 - Cos(\theta)\big)^2 \frac{d\theta}{6} \text{(A)}$$

Se aplica regla 2 y se desarrolla la potencia

$$\int Sen^4\,(3x)dx = \frac{1}{24}[\int d\theta - 2\int Cos(\theta)\text{d}\theta + \int Cos^2(\theta)\text{d}\theta]$$

$$= \frac{1}{24}\left[\int d\theta - 2\int Cos(\theta) + \frac{1}{2}[1 + Cos(20)]d\theta\right]$$

$$= \frac{1}{24}\left[\int d\theta - 2\int Cos(\theta)\text{d}\theta + \frac{1}{2}\int d\theta + \frac{1}{2}\int Cos(20)d\theta\right]$$

$$Sea\ 2\theta = \alpha \Rightarrow 2d\theta = d\alpha \Rightarrow d\theta$$

$$= \frac{1}{24}\left[\int d\theta - 2\int Cos(\theta)d\theta + \frac{1}{2}\int d\theta + \frac{1}{2}\int Cos(\alpha)\frac{d\alpha}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{24}\left[\int d\theta - 2\int Cos(\theta)d\theta + \frac{1}{2}\int d\theta + \frac{1}{4}\int Cos(\alpha)d\alpha\right]$$

$$= \frac{1}{24}\left[\frac{3}{2}\int d\theta - 2\int Cos(\theta)d\theta + \frac{1}{4}\int Cos(\alpha)d\alpha\right]$$

$$= \frac{1}{24}\left[\frac{3}{2}\theta - 2\mathrm{Sen}(\theta) + \frac{1}{4}Sen(2\theta)\right] + C$$

Quitando la variable α

$$= \frac{1}{24}\left[\frac{3}{2}\theta - 2\mathrm{Sen}(\theta) + \frac{1}{4}Sen(2\theta)\right] + C$$

Quitando la variable θ

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}6x - 2Sen(6x) + \frac{1}{4}Sen(2\cdot 6x)\right] + C = \frac{1}{24}\left[9x - 2Sen(6x) + \frac{1}{4}Sen(12x)\right] + C = \frac{1}{48}[36x - 8Sen(6x) + Sen(12x)] + C$$

4.3.3. Caso 3

$\int Sen^n(x)\cdot Cos^m(x)dx$; Donde al menos uno de los exponentes es impar (m ó n) es impar

La solución a este método es similar al método utilizado en el Caso 1.

a. Ejercicio ilustrativo 1

Calcular $\int Cos^4(x)Sen^3(x)\,dx$

- **Solución**

Se resuelve aplicando el mismo caso 1, donde se le resta 1 al exponente impar para utilizar la identidad trigonométrica.

$$Sen^2x = 1 - Cos^2x$$

$$\int Cos^4(x)Sen^3(x)\,dx \quad = \int Cos^4(x)Sen^3(x)Sen(x)\,dx$$

$$= \int Cos^4(x) \cdot \left(1 - Cos^2(x)\right) \cdot Sen(x)\,dx$$

Haciendo $Cos(x) = u \Rightarrow -Sen(x)dx = du \Rightarrow Sen(x)dx = -du$

$$= -\int u^4(1 - u^2) \cdot du$$

$$= \int (u^4 - u^6) \cdot du$$

$$= -\int u^4 du + \int u^6 du$$

$$= -\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + C$$

Quitando el cambio que tiene

$$= -{}^1\!/_5\, Cos^5(x) + {}^1\!/_7\, Cos^7(x) + C$$

b. Ejercicio ilustrativo 2

Calcular $\int Cos^5(x)Sen^4(x)dx$

- **Solución**

Análogamente al ejercicio anterior, se aplica la misma técnica

$$\int Cos^5(x)Sen^4(x)dx \quad = \int Sen^4(x)Cos^4(x)Cos(x)\,dx$$

$$= \int Sen^4(x)[Cos^2(x)]^2 Cos(x)dx\}$$

$$= \int Sen^4(x)[1 - Sen^2(x)]^2 Cos(x)dx$$

Haciendo $Sen(x) = u \Rightarrow Cos(x)dx = du$

$$= \int u^4\,[1 - u^2]^2 \text{du}$$

$$= \int u^4(1 - 2u^2 + u^4)du$$

$$= \int (u^4 2u^6 + u^8)du$$

$$= \int u^4 du - 2\int u^6 du + \int u^8 du$$

Quitando el cambio se tiene

$$\int Cos^4(x)Sen^4(x)dx = -\,{}^1\!/_5\,Cos^5(x) + {}^1\!/_7\,Cos^7(x) + C$$

c. *Ejercicio ilustrativo 3*

Calcular $\int Sen(5x) \cdot Cos(2x)dx$

- **Solución**

Usando la fórmula $Sen(mx) \cdot Cos(nx) = {}^1\!/_2\,Sen[(m-n)\cdot x] + {}^1\!/_2\,Sen[(m+n)\cdot x]$ se tiene que:

$\int Sen(5x) \cdot Cos(2x)dx \quad = {}^{1}/_{2} Sen[(5-2) \cdot x] + {}^{1}/_{2} Sen[(5+2) \cdot x]$

$$= {}^{1}/_{2} Sen(3x) + {}^{1}/_{2} Sen(7x)$$

Así la integral original se convierte en:

$\int Sen(5x) \cdot Cos(2x)dx \quad = \int\left[{}^{1}/_{2} Sen(3x) + {}^{1}/_{2} Sen(7x)\right]dx$

$$= {}^{1}/_{2} \int Sen(3x)dx$$

$$+ {}^{1}/_{2} \int Sen(7x)dx$$

Cambiando Variables

$$3x = u; \ 7x = v$$

$$3dx = du; \ 7dx = dv$$

$$dx = \frac{du}{3}; \ dx = \frac{dv}{7}$$

$$= {}^{1}/_{2} \int Sen(u)\frac{du}{3} + {}^{1}/_{2} \int Sen(v)\frac{dv}{7}$$

$$= \frac{1}{6}\int Sen(u)du + \frac{1}{14}\int Sen(v)dv$$

$$= -\frac{1}{6}Cos(u) - \frac{1}{14}Cos(v) + C$$

$$= -\frac{1}{6}Cos(3x) - \frac{1}{14}Cos(7x) + C$$

$$= -\frac{1}{42}[7Cos(3x) + 3Cos(7x)] + C$$

4.3.4. Caso 4

$\int Sen^n(x) \cdot Cos^m(x)dx$ donde m y n son números pares.

La solución a este método es similar al método utilizado en el Caso 2.

a. Ejercicio ilustrativo 1

Calcular $\int Sen^2(x) \cdot Cos^2(x)dx$

- **Solución**

$$\int Sen^2(x) \cdot Cos^2(x)dx = \int \left[\frac{1-Cos(2x)}{2}\right] \cdot \left[\frac{1+Cos(2x)}{2}\right] dx$$

$$= \frac{1}{4}\int [1 - Cos(2x)] \cdot [1 + Cos(2x)]\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int [1 - Cos^2(2x)]\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int Sen^2(2x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left[\frac{1 - Cos(4x)}{2}\right] dx$$

$$= \frac{1}{8}\int [1 - Cos(4x)]dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[\int dx - \int Cos(4x)dx\right]$$

Para la segunda integral usamos el cambio:

$$4x = u$$

$$4dx = du$$

$$dx = \frac{du}{4}$$

$$= \frac{1}{8}\left[\int dx - \int Cos(u)\frac{du}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{32}\int Cos(u)du$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}Sen(u) + C$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}Sen(4x) + C$$

$$= \frac{1}{32}[4x - Sen(4x)] + C$$

b. Ejercicio ilustrativo 2

Calcular $\int Sen^4(x) \cdot Cos^2(x)dx$

- **Solución**

$$\int Sen^4(x) \cdot Cos^2(x)dx = \int \left[\frac{1-Cos(2x)}{2}\right]^2 \cdot \left[\frac{1+Cos(2x)}{2}\right] dx$$

$$= \frac{1}{8}\int [1 - Cos(2x)]^2 \cdot [1 + Cos(2x)]dx$$

$$= \frac{1}{8}\int [1 - 2Cos(2x) + Cos^2\,(2x)] \cdot [1 + Cos(2x)]dx$$

$$= \frac{1}{8}\int [1 + Cos(2x) - 2Cos(2x) - 2Cos^2\,(2x) + Cos^2\,(2x) + Cos^3\,(2x)]dx$$

$$= \frac{1}{8}\int [1 - Cos(2x) - Cos\,(2x)Cos\,(2x)]\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int [1 - Cos(2x) - Cos\,(2x)Cos\,(2x)Cos(2x)]dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left[1 - Cos(2x) - \frac{1 + Cos(4x)}{2} + \left(1 - Sen^2(2x)\right)Cos(2x)\right]dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left[1 - Cos(2x) - \frac{1}{2} - \frac{1 + Cos(4x)}{2} + Cos(2x) - Sen\,(2x) \cdot Cos(2x)\right]dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left[\frac{1}{2} - \frac{1 + Cos(4x)}{2} - Sen\,(2x) \cdot Cos(2x)\right]dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[\int \frac{1}{2}dx - \int \frac{Cos(4x)}{2}dx - \int Sen^2\,(2x) \cdot Cos(2x)dx\right]$$

$$= \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int Cos(4x)dx - \frac{1}{8}\int Sen^2(2x) \cdot Cos(2x)dx$$

Usemos los siguientes cambios de variable

$$4x = u \qquad\qquad Sen(2x) = v$$

$$4dx = du \qquad\qquad 2Cos(2x)dx = dv$$

$$dx = \frac{du}{4} \qquad\qquad Cos(2x)dx = \frac{dv}{2}$$

$$= \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int Cos(u)\frac{du}{4} - \frac{1}{8}\int v^2 \cdot \frac{dv}{2}$$

$$= \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{64}\int Cos(u)du - \frac{1}{16}\int v^2 dv$$

$$\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}Sen(u) - \frac{1}{16}\frac{v^3}{3} + C$$

$$\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}Sen(4x) - \frac{1}{48}Sen^3(2x) + C$$

$$= \frac{1}{192}[12x - 3Sen(4x) - 4Sen^3(2x)] + C$$

c. *Ejercicio ilustrativo 3*

Calcular la integral $\int Sen^4(x)\, Cos(x)dx$

- **Solución**

$$\int sen^4x\, cos\, x\, dx \qquad = \int (u)^4 \times du$$

$$u = sen\, x \qquad = \frac{1}{5}u^5 + C$$

$$du = cos\ x\ dx \qquad\qquad = \frac{1}{5} sen^5 x + C$$

d. Ejercicio ilustrativo 4

Calcular la integral $\int Cos^3(4x)\, Sen(x) dx$

- **Solución**

$$\int cos^3 4x\ sen\ 4x\ dx$$

$$= \frac{1}{4} \times \int u^3 \left(\frac{-du}{4}\right)$$

$$u = cos\ 4x$$

$$= -\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} u^4 + C$$

$$du = -4sen\ 4x\ \mathrm{dx}$$

$$-\frac{du}{4} = sen\ 4x\ \mathrm{dx}$$

$$= -\frac{1}{16} cos^4(4x) + C$$

e. Ejercicio ilustrativo 5

Calcular la integral $\int cos^2 \frac{x}{2} dx$

- **Solución**

$$\int cos^2 \frac{x}{2} dx \; = \int \frac{1}{2}\left(1 + cos\left(\frac{2x}{2}\right)\right) dx$$
$$= \frac{1}{2}\int 1 + cosxdx$$
$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int cos(x)dx$$
$$= \frac{1}{2}x + \operatorname{sen} x + C$$

f. Ejercicio ilustrativo 6

Calcular la integral $\int Sen^2xdx$

- **Solución**

$$\int sen^2x\, dx \qquad = \int \frac{1}{2}\big(1 - cos\,(2x)\big)\; dx$$
$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int cos(2x)\; dx$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\; sen\,(2x) + C$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sen\,(2x) + C$$

g. Ejercicio ilustrativo 7

Calcular la integral $\int Sen^3xdx$

- **Solución**

$$\int Sen^3x\; dx \qquad = \int sen^2x \quad senx\; dx$$
$$u = \; cos\; x \qquad = \int 1 - cos^2x \;\; senx\; dx$$
$$du = \; -sen\; x \qquad = \int (1 - u^2)\; (-du)$$
$$-du = sen\; x\; dx \qquad = \int -du + \int u^2du$$
$$= -u + \frac{1}{3}u^3 + C$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$
$$= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$$

h. Ejercicio ilustrativo 8

Calcular la integral $\int Sen^2 x Cos x dx$

- **Solución**

$$\int sen^2 x \cos x\, dx \qquad = \int sen^2 x\ \cos^2 x\ \cos x\, dx$$
$$u = senx \qquad = \int sen^2 x\,(1 - sen^2 x)\ \cos x\, dx$$
$$du = \cos x\ dx \qquad = \int u^2\,(1 - u^2)\, du$$
$$= \int u^2 du - \int u^4 du$$
$$= \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 + C$$
$$= \frac{1}{3}sen^3 x - \frac{1}{5}sen^5 x + C$$

i. Ejercicio ilustrativo 9

Calcular la integral $\int Cos(4x)Sen(3x)dx$

- **Solución**

$$\int \cos(4x)\ sen(3x)\ dx$$
$$= \int \frac{1}{2}(\cos(4+3) - \cos(4-3)\ dx)$$
$$= \frac{1}{2}\int \cos 7x - \cos x\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}sen\ 7x - sen\ x\right) + C$$

j. Ejercicio ilustrativo 10

Calcular la integral $\int Sen(3y)Cos(5y)dy$

- **Solución**

$$\int sen\ 3y\ cos\ 5y\ dy$$

$$= \int \frac{1}{2}\big(sen\ (3y + 5y) - sen\ (3 + 5)\big)$$

$$= \frac{1}{2}\int sen\ 8y - sen\ 2y$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}cos\ 8y - \frac{1}{2}cos\ 2y\right) + C$$

k. Ejercicio ilustrativo 11

Calcular la integral $\int Sen^2(3t)Cos^2(3t)dt$

- **Solución**

$$\int Sen^2\ 3t\ \ Cos^2\ 3t\ dt$$

$$= \int \frac{1}{2}\bigg(1$$

$$- Cos\ (6t)$$

$$\times \frac{1}{2}\ (1 + Cos\ (6t)\ dt)\bigg)$$

$$= \frac{1}{4}\int \big(1 - Cos^2(6t)\big)\ dt$$

$$= \frac{1}{4} \times \int dt\ \ - \frac{1}{4}\int Cos^2(6t)\ dt$$

$$=\ \frac{1}{4}t$$

$$- \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}\big(1 + Cos(12t)\big)\ dt$$

$$= \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\int dt + \frac{1}{8}\int Cos\ 12t$$

$$= \frac{1}{4}t\ \ -\ \ \frac{1}{8}t$$

$$+\ \ \frac{1}{8}\ \ \times\ \ \frac{1}{12}Sen\ 12t + C$$

$$= \frac{1}{4}t \; - \; \frac{1}{8}t \; + \; \frac{1}{96}Sen\, 12t$$
$$+ C$$

$$= \frac{1}{8}t \; + \; \frac{1}{96}Sen\, 12t + C$$

l. Ejercicio ilustrativo 12

$$\int sin^2 3\, t\, cos^2 3\, tdt$$

Utilizando la identidad de doble ángulo:

$sin^2 x = \frac{1-cos\, 2x}{2}$ y $cos^2 x = \frac{1+cos\, 2x}{2}$

Entonces, sustituyendo:

$$sin^2 3\, t\, cos\ {}^2 3\, t$$
$$= \left(\frac{1 - cos\, 6\, x}{2}\right)\left(\frac{1 + cos\, 6\, x}{2}\right)$$

Multiplicamos los términos:

$$sin^2 3\, t\, cos^2 3\, t = \frac{1 - cos^2 6\, x}{4}$$

Ahora usamos la identidad $cos^2 x = \frac{1+cos\, 2x}{2}$:

$$\frac{1 - cos^2 6\, x}{4} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1 + cos^2 1\, 2x}{2}\right)$$

Por lo tanto, la integral queda:

$$\int \frac{1 - cos\, 1\, 2t}{8} dt$$

La resolvemos término a término:

$\int \frac{1-cos\,12t}{8} dt = \frac{1}{8}\int(1 - cos\,1\,2t)dt$

$$= \frac{1}{8}\left(t - \frac{sin\,1\,2t}{12}\right) + c$$

$$= \frac{t}{8} - \frac{sin\,1\,2t}{96} + c$$

m. Ejercicio ilustrativo 13

Calcular la integral $\int \frac{Cos(2t)}{Sen^2(2t)} dt$

- **Solución**

Primero simplificamos la expresión: $\frac{cos\,2t}{sin^4\,2t} = cos\,2\,t \cdot sin^{-4}\,2\,t$

$\int \frac{cos\,2t}{sin^4\,2t} dt = \int cos\,2\,t \cdot sin^{-4}\,2\,tdt$

Luego hacemos el cambio de variable:

$$sin\,2\,t = u \Rightarrow 2\,cos\,2\,dt = du \Rightarrow cos\,2\,tdt = \frac{du}{2}$$

Entonces la integral queda:

$$\int Cos2t.Sin^{-4}2tdt = \frac{1}{2}\int u^{-4}\,du$$

Resolvemos la integral

$$\frac{1}{2}\int u^{-4}\,du = \frac{1}{2}\left(\frac{u^{-3}}{-3}\right)$$

$= -\frac{1}{6}u^{-3}$ Quitando el cambio se tiene finalmente:

$= -\frac{1}{6}sin^{-3}\,2\,t + c$

Resultado:

$$\int \frac{Cos2t}{Sin^4 2t}dt = -\frac{1}{6\,sin^3\,2\,t} + c$$

4.3.5. Ejercicios propuestos

Tabla 10. Ejercicios propuestos.

1	$\int (sen\ 3t - sen\ 2t)^2 dt$	**6**	$\int (\sin^2 t + \cos t)^2 dt$
2	$\int sin^5 x cos^2 x dx$	**7**	$\int (2 - Sin\ y)^2 dt$
3	$\int \sin^6 y\,dy$	**8**	$\int \frac{\cos^3 3x}{\sqrt[3]{\sin 3x}}\ dx$
4	$\int \cos^4 x\,dx$	**9**	$\int \sin^4 x\,dx$
5	$\int \sin^4 z\,dz$		

4.4. Integración de potencias de la tangente, cotangente, secante y cosecante

4.4.1. Caso 1

$\int \boldsymbol{Tan^n(u)du}$ *ó* $\int \boldsymbol{Ctg^n(u)du}$ donde n es un entero positive

Se desarrolla:

$$\boldsymbol{Tan^n(u)du = Tan^{(n-2)}(u) \cdot Tan^2(u)} \qquad \boldsymbol{Ctg^n(u)du = Ctg^{(n-2)}(u) \cdot Ctg^2(u)}$$

$$\boldsymbol{Tan^n(u)du = Tan^{(n-2)}(u) \cdot [Sec^2(u) - 1]} \qquad \boldsymbol{Ctg^n(u)du = Ctg^{(n-2)}(u) \cdot [Csc^2(u) - 1]}$$

a. Ejercicio ilustrativo 1

Calcular $\int Tan^4(x)dx$ $\int Tan^4(x)dx = \int Tan^2(x) \cdot Tan^2(x)dx$

$$= \int Tan^2(x) \cdot [Sec^2(x) - 1]dx$$

$$= \int [Tan^2(x) \cdot Sec^2(x) - Tan^2(x)]\, dx$$

$$= \int [Tan^2(x) \cdot Sec^2(x) - (Sec^2(x) - 1)]\, dx$$

$$= \int [Tan^2(x) \cdot Sec^2(x) - Sec^2(x) + 1]\, dx$$

$$= \int Tan^2(x) \cdot Sec^2(x) dx - \int Sec^2(x) dx$$

Realizamos un cambio de variable, siendo

$$u = Tan(x) \quad y \quad du = Sec^2(x)dx \qquad = \int u^2 du - \int Sec^2(x)dx + \int du$$

$$= \frac{1}{3}u^3 - Tan(x) + x + C$$

$$= \frac{1}{3}Tan^3(x) - Tan(x) + x + C$$

b. Ejercicio ilustrativo 2

Calcular $\int Ctg^3(x)dx$

$$\int Ctg^3(x)dx = \int Ctg(x) \cdot Ctg^2(x)dx$$

$$= \int Ctg(x) \cdot [Csc^2(x) - 1]$$

$$= \int [Ctg(x) \cdot Csc^2(x) - Ctg(x)]\, dx$$

$$= \int Ctg(x) \cdot Csc^2(x)dx - \int Ctg(x)dx$$

Realizamos el cambio de variable, siendo $u = Ctg(x)$ y $-du = Csc^2(x)dx$

$$= \int -udu - \int Ctg(x)dx$$
$$= -\frac{1}{2}u^2 - Ln|Sec(x)| + C$$
$$= -\frac{1}{2}Ctg^2 - Ln|Sec(x)| + C$$

4.4.2. Caso 2

$\int \boldsymbol{Sec^n(u)du}$ ***ó*** $\int \boldsymbol{Csc^n(u)du}$ donde n es un entero positivo par

Se desarrolla:

$$\int Sec^n(u) = Sec^{(n-2)}(u) \cdot Sec^2(u) \qquad \int Csc^n(u) = Csc^{(n-2)}(u) \cdot Csc^2(u)$$

$$\int Sec^n(u) = [Tan^2(u) + 1]^{\frac{n-2}{2}} \cdot Sec^2(u) \qquad \int Csc^n(u) = [Ctg^2(u) + 1]^{\frac{n-2}{2}} \cdot Csc^2(u)$$

a. Ejercicio ilustrativo 1

Calcular $\int Sec^4(2x)dx$

$$\int Sec^4(2x)dx = \int Sec^2(2x) \cdot Sec^2(2x)dx$$

$$= \int Sec^2(2x)$$
$$\cdot [Tan^2(2x) + 1]\, dx$$
$$= \int [Tan^2(2x) \cdot Sec^2(2x)$$
$$+ Sec^2(2x)]\, dx$$
$$= \int Tan^2(2x) \cdot Sec^2(2x) dx$$
$$+ \int Sec^2(2x) dx$$

Realizamos el cambio de variable siendo $u = Tan(2x)$ y $\frac{du}{2} = Sec^2(2x)dx$

$$= \int u^2 \frac{du}{2} + \int \frac{du}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\int u^2 du + \frac{1}{2}\int du$$
$$= \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{2}u + C$$
$$= \frac{1}{6}Tan^3(2x)$$
$$+ \frac{1}{2}Tan(2x) + C$$

b. Ejercicio ilustrativo 2

Calcular $\int Csc^6\left(\frac{x}{3}\right) dx$

$$\int Csc^6\left(\frac{x}{3}\right) dx = \int Csc^4\left(\frac{x}{3}\right) \cdot Csc^2\left(\frac{x}{3}\right) dx$$
$$= \int \left[\left(Ctg^2\left(\frac{x}{3}\right) + 1\right)^2\right.$$
$$\left. \cdot Csc^2\left(\frac{x}{3}\right)\right] dx$$

$$= \int \left[\left(Ctg^4\left(\frac{x}{3}\right) + 2Ctg^2\left(\frac{x}{3}\right) + 1 \right) \cdot Csc^2\left(\frac{x}{3}\right) \right] dx$$

$$= \int \left[Ctg^4\left(\frac{x}{3}\right) Csc^2\left(\frac{x}{3}\right) + 2Ctg^2\left(\frac{x}{3}\right) Csc^2\left(\frac{x}{3}\right) + Csc^2\left(\frac{x}{3}\right) \right] dx$$

$$= \int Ctg^4\left(\frac{x}{3}\right) Csc^2\left(\frac{x}{3}\right) dx + \int 2Ctg^2\left(\frac{x}{3}\right) Csc^2\left(\frac{x}{3}\right) dx + \int Csc^2\left(\frac{x}{3}\right) dx$$

Realizamos el cambio de variable, siendo $u = Ctg\left(\frac{x}{3}\right) \quad y \quad -3du = Csc^2\left(\frac{x}{3}\right) dx$

$$= -3\int u^4 du - 6\int u^2 Csc^2 du - 3\int du$$

$$= -\frac{3}{5}u^5 - \frac{6}{3}u^3 - 3u + C$$

$$= -\frac{3}{5}Ctg^5\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{6}{3}Ctg^3\left(\frac{x}{3}\right) - 3Ctg\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

4.4.3. Caso 3

$\boldsymbol{\int Sec^n(u)du}$ ***ó*** $\boldsymbol{\int Csc^n(u)du}$ donde n es un entero positivo impar +

En este caso se usa la Integración por partes.

a. Ejercicio ilustrativo 1

Calcular $\int Sec^3(x)dx$

Tomando en cuenta la regla LIA(T)E se hace:

$$\boldsymbol{u = Sec(x)} \qquad \boldsymbol{dv = \int Sec^2(x)dx}$$

$$\boldsymbol{du = Sec(x) \cdot Tan(x)dx} \qquad \boldsymbol{v = Tan(x)}$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes se tiene:

$$\int Sec^3(x)dx = Sec(x) \cdot Tan(x) - \int Tan(x) \cdot Sec(x) \cdot Tan(x)dx$$

$$\int Sec^3(x)dx = Sec(x) \cdot Tan(x) - \int Tan^2(x) \cdot Sec(x)dx$$

Cambiando la Sec^2x por su identidad trigonométrica

$$\int Sec^3(x)dx = Sec(x) \cdot Tan(x) - \int (Sec^2(x) - 1) \cdot Sec(x)dx$$

$$\int Sec^3(x)dx = Sec(x) \cdot Tan(x) - \int Sec^3(x)dx - \int Sec(x)dx$$

$$\int Sec^3(x)dx$$
$$= Sec(x)\cdot Tan(x)$$
$$-\int Sec^3(x)dx$$
$$- Ln|Sec(x)+Tan(x)|+C$$
$$\int Sec^3(x)dx + \int Sec^3(x)dx$$
$$= Sec(x)\cdot Tan(x)$$
$$- Ln|Sec(x)+Tan(x)|+C$$
$$2\int Sec^3(x)dx$$
$$= Sec(x)\cdot Tan(x)$$
$$- Ln|Sec(x)+Tan(x)|+C$$
$$\int Sec^3(x)dx = \frac{1}{2}[Sec(x)\cdot Tan(x) - Ln|Sec(x)+Tan(x)|+C]$$

b. Ejercicio ilustrativo 2

Calcular $\int Csc^5(x)dx$

Tomando en cuenta la regla LIA(T)E se hace:

$$u = Csc^3(x) \qquad dv = Csc^2(x)dx$$
$$du = -3Csc^2(x)\cdot Csc(x)\cdot Ctg(x)dx \qquad \int dv = \int Csc^2(x)dx$$
$$du = -3Csc^3(x)\cdot Ctg(x)dx \qquad v = -Ctg(x)$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes se obtiene

$$\int Csc^5(x)dx = -Ctg(x)Csc^3(x) - 3\underbrace{\int Csc^3(x)\cdot Ctg(x)dx}_{A}$$

Resolviendo aquella integral queda

$$I1 = \int Csc^3(x) \cdot Ctg^2(x)\, dx$$

$$\int Csc^3(x) \cdot (Csc^2(x) - 1)\, dx$$

$$\int \left(Csc^5(x) - Csc^3(x)\right) dx$$

$$\int Csc^5(x)dx - \underbrace{\int Csc^3(x)dx}_{\text{B}}$$

Observe que la primera integral es nuestra integral original y la I2 se resuelve por este mismo caso i.e. por integración por partes con el siguiente cambio de variable.

$$u = Csc(x) \qquad dv = Csc^2(x)dx$$

$$du = -Csc(x) \cdot Ctg(x)dx \qquad \int dv = \int Csc^2(x)dx$$

$$v = -Ctg(x)$$

Por lo tanto, I2 quedará como

$$\int Csc^3(x)dx$$

$$= -Csc(x) \cdot Ctg(x)$$

$$- \int Csc(x) \cdot Ctg^2(x)dx$$

$$= -Csc(x) \cdot Ctg(x)$$

$$- \int Csc(x)$$

$$\cdot (Csc^2(x) - 1)\, dx$$

$$= -Csc(x) \cdot Ctg(x) - \int Csc^3(x)dx + \int Csc(x)dx$$

$$\int Csc^3(x)dx + \int Csc^3(x)dx = -Csc(x) \cdot Ctg(x) + \int Csc(x)dx$$

$$2\int Csc^3(x)dx = -Csc(x) \cdot Ctg(x) + Ln|Csc(x) - Ctg(x)|$$

$$\int Csc^3(x)dx = \frac{1}{2}[-Csc(x) \cdot Ctg(x) + Ln|Csc(x) - Ctg(x)|]$$

Al sustituir esta integral en I1 en la expresión B se obtiene:

$$I1 = \int Csc^5(x)dx - \frac{1}{2}[-Csc(x) \cdot Ctg(x) + Ln|Csc(x) - Ctg(x)|]$$

Sustituyendo I1 en la expresión A obtenemos:

$$\int Csc^5(x)dx = -Ctg(x)Csc^3(x) - 3\int Csc^3(x) \cdot Ctg^2(x)dx$$

$$\int Csc^5(x)d\,x$$
$$= -Ctg(x)Csc^3(x)$$
$$- 3\left[\int Csc^5(x)d\,x\right.$$
$$-\frac{1}{2}[-Csc(x)\cdot Ctg(x)$$
$$\left.+ Ln|Csc(x) - Ctg(x)|]\right]$$
$$\int Csc^5(x)d\,x$$
$$= -Ctg(x)Csc^3(x)$$
$$- 3\int Csc^5(x)d\,x - \frac{3}{2}Csc(x)$$
$$\cdot Ctg(x)$$
$$+\frac{3}{2}Ln|Csc(x) - Ctg(x)|$$
$$\int Csc^5(x)d\,x + 3\int Csc^5(x)d\,x$$
$$= -Ctg(x)Csc^3(x) - \frac{3}{2}Csc(x)$$
$$\cdot Ctg(x)$$
$$+\frac{3}{2}Ln|Csc(x) - Ctg(x)|$$
$$4\int Csc^5(x)d\,x$$
$$= -Ctg(x)Csc^3(x) - \frac{3}{2}Csc(x)$$
$$\cdot Ctg(x)$$
$$+\frac{3}{2}Ln|Csc(x) - Ctg(x)|$$
$$\int Csc^5(x)d\,x$$
$$= \frac{1}{4}\left[-Ctg(x)Csc^3(x)\right.$$
$$-\frac{3}{2}Csc(x)\cdot Ctg(x)$$
$$\left.+\frac{3}{2}Ln|Csc(x) - Ctg(x)|\right]$$

$$\int Csc^5(x)dx$$
$$= \frac{1}{8}[-2Ctg(x)Csc^3(x)$$
$$- 3Csc(x) \cdot Ctg(x)$$
$$+ 3Ln|Csc(x) - Ctg(x)|]$$

4.4.4. Caso 4

$\int \boldsymbol{Tan^m(u) \cdot Sec^n(u)du}$ ***ó*** $\int \boldsymbol{Ctg^m(u) \cdot Csc^n(u)du}$ donde n es un entero positivo par.

Se desarrolla:

$$Sec^n(u) = Sec^{n-2}(u) \cdot Sec^2(u)$$

$$Csc^n(u) = Csc^{n-2}(u) \cdot Csc^2(u)$$
$$Sec^n(u) = Sec^{n-2}(u) \cdot [1 + Tan^2(u)]$$

$$Csc^n(u) = Csc^{n-2}(u) \cdot [1 + Ctg^2(u)]$$

a. Ejercicio ilustrativo 1

Calcular $\int Tan^4(x)Sec^4(x)dx$

$$\int Tan^4(x)Sec^4(x)dx$$

$$= \int Tan^4(x) \cdot Sec^2(x) \cdot Sec^2(x)dx$$
$$= \int Tan^4(x) \cdot (Tan^2(x) + 1) \cdot Sec^2(x)dx$$

Realizamos el cambio de variable, siendo $u = Tan(x)$ y $du = Sec^2dx$

$$= \int u^4 \cdot (u^2 + 1) \cdot du$$

$$= \int (u^6 + u^4) \cdot du$$

$$= \int u^6 du + \int u^4\, du$$

$$= \frac{1}{7}u^7 + \frac{1}{5}u^5 + C$$

$$= \frac{1}{7}Tan^7(x) + \frac{1}{5}Tan^5(x) + C$$

b. Ejercicio ilustrativo 2

Calcular $\int Ctg^5(x)Csc^6(x)dx$

$$\int Ctg^5(x)Csc^6(x)dx$$

$$= \int Ctg^5(x) \cdot \left(Csc^2(x)\right)^2 \cdot Csc^2(x)dx$$

$$= \int Ctg^5(x) \cdot (Ctg^2(x) + 1) \cdot Csc^2(x)dx$$

Realizamos el cambio de variable, siendo $u = Ctg(x) \quad y \quad -du = Csc^2(x)dx$

$$= -\int u^5 \cdot (u^2 + 1)^2 \cdot du$$

$$= \int (u^9 + 2u^7 + u^5)\, du$$

$$= \int u^9 du + \int 2u^7 du + \int u^5 du$$

$$= \frac{1}{10}u^{10} + \frac{1}{4}u^8 + \frac{1}{6}u^6 + C$$

$$= \frac{1}{10}Ctg^{10}(x) + \frac{1}{4}Ctg^8(x) + \frac{1}{6}Ctg^6(x) + C$$

4.4.5. *Caso 5*

$\int Tg^m(u).Sec^n(u)du$ ó $\int Ctg^m(u).Csc^n(u)du$ donde n es un entero positivo impar

a. *Ejercicio ilustrativo 1*

Calcular $\int Ctg^5(x).Csc^5(x)dx$

$$\int Ctg^5(x).Csc^5(x)dx = \int Ctg^4(x).Csc^4(x).Ctg(x).Csc(x)dx$$

$$= \int [Csc^2(x) - 1]^2.Csc^4(x).Ctg(x).Csc(x)dx$$

$$= \int [Csc^4(x) - 2Csc^2(x) + 1].Csc^4(x).Ctg(x).Csc(x)dx$$

Sea

$v = Csc(x) \to dv = -Csc(x).Ctg(x)dx \to -dv = Ctg(x).Csc(x)dx$

$$= \int (v^4 - 2v^2 + 1).v^4.(-dv)$$

$$= -\int (v^8 - 2v^6 + v^4).dv$$

$$= -\int v^8dv + 2\int v^6dv - \int v^4dv$$

$$= -\frac{1}{9}v^9 + \frac{2}{7}v^7 - \frac{1}{5}v^5 + c$$

$$= -\frac{1}{9}Csc^9(x) + \frac{2}{7}Csc^7(x) - \frac{1}{5}Csc^5(x) + c$$

b. *Ejercicio ilustrativo 2*

Calcular $\int Tg^5(x).Sec^7(x)dx$

$$\int Tg^5(x).Sec^7(X)dx = \int Tg^4(x).Sec^6(x).Tg(x).Sec(x)dx$$

$$= \int [Sec^2(x) - 1]^2.Sec^6(x).Tg(x).Sec(x)dx$$

$$= \int [Sec^4(x) - 2Sec^2(x) + 1].Sec^6(x).Tg(x).Sec(x)dx$$

Sea $\theta = Sec(x) \rightarrow d\theta = Sec(x).Tg(x)dx$

$$= \int (\theta^4 - 2\theta^2 + 1).\theta^6.d\theta$$

$$= \int (\theta^{10} - 2\theta^8 + \theta^6).d\theta$$

$$= \int \theta^{10}d\theta - 2\int \theta^8 d\theta + \int \theta^6 d\theta$$

$$= \frac{1}{11}\theta^{11} - \frac{2}{9}\theta^9 + \frac{1}{7}\theta^7 + c$$

$$= \frac{1}{11}Sec^{10}(x) - \frac{2}{9}Sec^9(x) + \frac{1}{7}Sec^7(x) + c$$

4.4.6. Caso 6

$\int Tg^m(u)Sec^n(u)du$ ó $\int Ctg^m(u)Csc^n(u)du$ donde m es un entero positivo par y n es un entero positivo impar. El integrando se puede expresar en términos de potencias impares de la secante o la cosecante y luego se aplica integración por partes como en el Caso 3.

a. Ejercicio ilustrativo 1

Calcular $\int Tg^2(x).Sec^3(x)dx$

$$\int Tg^2(x).Sec^3(x)dx$$

$$= \int Tg^2(x).Sec^3(x)dx$$

$$= \int [Sec^2(x) - 1].Sec^3(x)dx$$

$$= \int [Sec^5(x) - Sec^3(x)]\, dx$$

$$= \underbrace{\int Sec^5(x)dx}_{I1} - \underbrace{\int Sec^3(x)dx}_{I2} \qquad (A)$$

I2 fue resuelta en el ejemplo ilustrativo 1 del caso 3 y cuyo resultado es:

$$\int Sec^3(x)dx = \frac{1}{2}[Sec(x).Tg(x) - Ln|Sec(x) + Tg(x)|] \qquad (B)$$

Debemos resolver ahora I1 $\int Sec^5(x)dx$ la que se resuelve por integración por partes Tomando en cuenta la regla LIA(T)E se hace

$$u = Sec^3(x) \qquad dv = Sec^3(x)\, dx$$

$$du = 3Sec^2(x).Sec(x).Tg(x)dx \qquad \int dv = \int Sec^3(x)\, dx$$

$$du = 3Sec^3(x), Tg(x)dx \qquad v = Tg(x)$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes se tiene:

$$\int Sec^5(x)dx = Tg(x).Sec^3(x) - 3\int Tg^2(x)Sec^3(x)dx \; (c)$$

Resolviendo $\int Tg^2(x)Sec^3(x)dx$

$$\int Tg^2(x)Sec^3(x)dx = \int (Sec^2(x) - 1).Sec^3(x)dx$$

$$\int Tg^2(x)Sec^3(x)dx = \int \left[Sec^5(x) - Sec^3(x)\right]dx$$

$$\int Tg^2(x)Sec^3(x)dx = \int Sec^5(x)dx - \int Sec^3(x)dx \quad (D)$$

Sustituyendo (D) en (C) tenemos

$$\int Sec^5(x)dx = Tg(x).Sec^3(x) - 3\left(\int Sec^5(x)dx - \int Sec^3(x)dx\right)$$

$$\int Sec^5(x)dx = Tg(x).Sec^3(x) - 3\int Sec^5(x)dx + 3\int Sec^3(x)dx$$

$$4\int Sec^5(x)\,dx = Tg(x).Sec^3(x) + 3\int Sec^3(x)dx$$

$$\int Sec^5(x)dx = \frac{1}{4}\left(Tg(x).sec^3(x) + 3\int Sec^3(x)dx\right) \quad (E)$$

Sustituyendo (B) en (E) tenemos

$$\int Sec^5(x)dx = \frac{1}{4}\left(Tg(x).Sec^3(x) + \frac{3}{2}[Sec(x).Tg(x) - Ln|Sec(x) + Tg(x)|]\right)$$

(F)

Seguidamente ya para concluir sustituimos (B) y (F) en (A)

$$\int Tg^2(x).Sec^3(x)dx = \frac{1}{4}\left(Tg(x).Sec^3(x) + \frac{3}{2}[Sec(x).Tg(x) - Ln|Sec(x) + Tg(x)|]\right)$$

$$= \frac{1}{2}[Sec(x).Tg(x) - Ln|Sec(x) + Tg(x)|]$$

$$\frac{1}{4}Tg(x).Sec^3(x) + \frac{3}{8}Sec(x).Tg(x) - \frac{3}{8}Ln|Sec(x) + Tg(x)| - \frac{1}{2}Sec(x).Tg(x) + \frac{1}{2}Ln|Sec(x) + Tg(x)|$$

$$= \frac{1}{4}Tg(x).Sec^3(x) - \frac{1}{8}Sec(x).Tg(x) + \frac{1}{8}Ln|Sec(x) + Tg(x)| + c$$

$$= \frac{1}{8}[2.Tg(x).Sec^3(x) - Sec(x).Tg(x) + Ln|Sec(x) + Tg(x)|] + c$$

b. Ejercicio ilustrativo 2

Calcular $\int Ctg^2(x).Csc(x)dx$

$$\int Tg^2(x).Sec^3(x)dx$$

$$= \frac{1}{8}[2.Tg(x).Sec^3(x) - Sec(x).Tg(x) + Ln|Sec(x) + Tg(x)|] + c$$

$$\int Ctg^2(x).Csc(x)dx = \int [Csc^2(x) - 1].Csc(x)dx$$

$$= \underbrace{\int Csc^3(x)dx}_{11} - \underbrace{\int Csc(x)dx}_{12}$$

I2 es una integral directa definida en el formulario de integrales como la

número 25 por lo cual nuestra integral original quedará como sigue = $\frac{1}{2}[-Csc(x).Ctg(x) + Ln|Csc(x) - Ctg(x)|] - Ln|Csc(x) - Ctg(x)|$ =

$$-\frac{1}{2}Csc(x).Ctg(x) + \frac{1}{2}Ln|Csc(x) - Ctg(x)| - Ln|Csc(x) - Ctg(x)|$$

$$= -\frac{1}{2}Csc(x).Ctg(x) - \frac{1}{2}Ln|Csc(x) - Ctg(x)| + c$$

c. Ejercicio ilustrativo 3

$$4. \int \frac{Sec^3 x}{Tan^4 x}\, dx = \qquad = \int \frac{\frac{1}{Cos^3 x}}{\frac{Sen^4 x}{Cos^{4x} x}}$$

Sustituimos por entiedad trigonometrica

$$= \int \frac{Cos^4 x}{Cos^3 x\, Sen^4 x}$$

$$= \int \frac{Cosx}{Sen^4 x}$$

$u = Senx$

$$= \int Cosx \times Sen^{-4} x\, dx$$

$du = Cosx\, dx$

$$= \int Sen^{-4} x\, Cosx\, dx$$

Cambio de variable

Sea $Senx - u \Rightarrow Cosx\, dx = du$

$$= \int \mathbf{u}^{-4} \times\, du$$

$$= \frac{\mathbf{u}^{-3}}{\mathbf{-3}}$$

$$= \frac{1}{3} Sen^{-3} + C$$

$$= -\frac{1}{3} Sen3x + C$$

d. Ejercicio ilustrativo 4

$$\int \frac{Sen^2 w}{Cos^4 w} dw$$

$$= \int \frac{1 - Cos^2 w}{Cos^4} dw$$

Sustituimos por identidad trigonométrica

$$= \int \frac{1w}{Cos^4 w} - \frac{Cos^2 w}{Cos^4 w} dw$$

$$= \int Sec^4 w - \frac{1}{Cos^2 w} dw$$

$$= \int Sec^4 w - Sec^2 w dw$$

Se cambia el Sec^4wpor caso 1 de potencia de la Sec y se separan las integrales por regla 2

$$= \int Sec^2w(Tan^2w + 1)dw - \int Sec^2wdw$$

Realizamos cambio de variables donde $u = Tanw\ y\ du = Sec^2wdw$

$$= \int du(u^2 + 1) - \int du$$

$$= \int u^2du + \int du - \int du$$

$$= \frac{u^3}{3} + u - u + C$$

Regresamos el cambio de variable

$$= \frac{1}{3}Tan^3w + Tanw - Tanw + C$$

$$= \frac{1}{3}Tan^4w + C$$

e. Ejercicio ilustrativo 5

$$\int Tan^3zSec^{5/3}dz$$

$$= \int Tan^2zSec^{3/2}\ TanzSecz$$

Se aplica caso 5 de las potencias, donde se le resta 1 a cada exponente y se utiliza identidad trigonométrica

$$= \int (Sec^2z - 1)Sec^{3/2}z \cdot TanzSecz\,dz$$

Se realiza un cambio de variable donde $u = Secz\ y\ du = SeczTanzdz$

$$= \int (u^2 - 1)u^{3/2}du$$

$$= \int u^{7/2}du - \int u^{3/2}du$$

$$= \frac{2}{9}u^{9/2} - \frac{2}{5}u^{5/2} + C$$

Regresamos el cambio de variable

$$= \frac{2}{9}Sec^{9/2}z - \frac{2}{5}Sec^{5/2}z + C$$

f. Ejercicio ilustrativo 6

$$\int Tan^6xSec^4xdx$$

$$= \int Tan^6xSec^2xSec^2xdx$$

Se aplica caso 4 de las potencias, donde se le resta 2 al exponente y en el residuo se utiliza identidad trigonométrica

$$= \int Tan^6x(Tan^2x + 1)Sec^2xdx$$

Se realiza cambio de variable donde $u = Tanx\ y \rightleftarrows\ du = Sec^2xdx$

$$= \int u^6(u^2 + 1)du$$

$$= \int u^8du + \int u^6du$$

$$= \frac{1}{9}u^9 + \frac{1}{7}u^7 + C$$

Regresamos el cambio de variable

$$= \frac{1}{9} Tan^9 x + \frac{1}{7} Tan^7 x + C$$

g. Ejercicio ilustrativo 7

$$\int \tan^2(5x)dx$$

Paso 1: Usamos la identidad trigonométrica:

$$\tan^2(x) = \sec^2(x) = 1$$

Entonces reescribimos de la integral de la siguiente manera:

$$\int \tan^2(5x)dx \int (\sec^2(5x) - 1)dx$$

Paso 2: Resolver cada parte por separado.

Primero resolvemos:

$$\int \sec^2(5x)dx$$

Sabemos que la integral de $\int \sec^2(x)dx$ es $\tan(x)$, por lo tanto:

$$\int \sec^2(5x)dx = \frac{1}{5}\tan(5x)$$

Ahora, resolvemos la integral de 1:

$$\int 1dx = x$$

Paso 3: Combinamos los resultados**.**

Entonces, la integral completa será:

$$\int (\sec^2(5x) - 1)dx = \frac{1}{5}\tan(5x) - x + c$$

h. Ejercicio ilustrativo 8

$$\int \tan^4\left(\frac{4}{x}\right)\frac{1}{x}dx$$

Paso 1: Sustitución adecuada

Hacemos la sustitución

$$u = \frac{x}{4}$$

Así que:

$$du = \frac{1}{4}dx$$

Esto nos lleva a reescribir la integral de la siguiente manera:

$$\int \sec^4(4u)\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{4}du$$

Paso 2: Devolvemos el cambio

$$-\frac{4}{3}\cot(3x^4) - 4\cot\left(\frac{x}{4}\right) + c$$

$$-\frac{4}{3}Cot^3\frac{x}{4}-4Cot\frac{x}{4}+C$$

4.4.7. Ejercicios propuestos

Tabla 11. Ejercicios propuestos.

Nº	Integrales	Respuesta
1	$\int Cot^3 2xCsc2xdx$	$\frac{1}{2}Csc2x-\frac{1}{6}Csc^3 2x+C$
2	$\int Cot^3 t \rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows\ dt$	$-\frac{1}{2}Cot2\quad t-Ln\lvert Sen\ t\rvert+C$
3	$\int Csc^4\frac{x}{4}\rightleftarrows xdx$	$-\frac{4}{3}Cot^3\frac{x}{4}-4Cot\frac{x}{4}+C$
4	$\int Sec^4 xdx \rightleftarrows$	$\frac{1}{3}Tan^3 x+Tan\ x+C$
5	$\int \frac{Cos^4 y}{Sen^4 y}dy \rightleftarrows$	$-\frac{1}{5}Cot^5 y+C$
6	$\int (Tan2x+Cot2x\quad) \rightleftarrows^2\ dx$	$\frac{1}{2}(Tan2x-Cot2x)+C$
7	$\int (Cot^2 2x+Cot^4 2x)dx \rightleftarrows$	$-\frac{1}{6}Cot^3 2x+C$
8	$\int \frac{2Secw-1}{Cos^2 w}dw \rightleftarrows$	$2Secw-Tanw+C$
9	$\int \frac{dx}{Sec2\quad 2xCos^4 2x} \rightleftarrows$	$Tan2x+\frac{1}{6}Tan^3 2x-\frac{1}{2}Cot2x+C$
10	$\int Cot^2 3xCsc^4 \rightleftarrows 3xdx$	$-\frac{1}{9}Cot^3 3x-\frac{1}{15}Cot^5 3x+C$

11	$\int e^x Tan^4(e^x)dx$	$\frac{1}{3}Tan^3 e^x - Tan e^x + e^x + C$
12	$\int Tan^5 3x dx$	$\frac{1}{12}Tan^4 3x - \frac{1}{6}Tan^2 3x + \frac{1}{3}Ln\lvert Sec3x\rvert + C$
13	$\int \frac{Tan^3(Ln\lvert x\rvert)Sec^6(Ln\lvert x\rvert)}{x}dx$	$\frac{1}{4}Tan^4 3x(Ln\lvert x\rvert) + \frac{1}{3}Tan^6(Ln\lvert x\rvert) + \frac{1}{8}Tan^8(Ln\lvert x\rvert) + C$
14	$\int Tan^6 3x dx$	$\frac{1}{15}Tan^5 3x - \frac{1}{9}Tan^2 3x + \frac{1}{3}Tan3x - x + C$
15	$\int Csc^3 x dx$	$-\frac{1}{2}CscxCotx + \frac{1}{2}Ln\lvert Cscx - Cotx\rvert + C$
16	$\int \frac{Sen^{3/4}x}{Cos^{11/2}x}dx$	$\frac{2}{5}Tan^{5/2}x + \frac{2}{9}Tan^{9/2}x + C$

4.5. Integración por sustitución trigonométrica

Se usa para resolver integrales con expresiones que contienen $\sqrt{a^2-u^2}, \sqrt{a^2-u^2}, \sqrt{a^2-u^2}$

$a^2-u^2, a^2+u^2, u^2-a^2$, el momento más corto para integrar dichas expresiones es efectuar un cambio de variable trigonométrico como se indica a continuación.

Para$\sqrt{a^2 - u^2}$se hace $u = aSen\theta$para lo que $\sqrt{a^2 - u^2} = aCos\theta$

Para $a^2 - u^2$ se hace $u = aSen\theta$para lo que $a^2 - u^2 = aCos\theta$

Para $\sqrt{a^2 + u^2}$se hace $u = a\ tg\theta$para lo que $\sqrt{a^2 + u^2} = a\ Sec\theta$

Para $a^2 - u^2$ se hace $u = a\ tg\theta$ para lo que $a^2 - u^2 = aCos\theta$

Para $\sqrt{a^2 + u^2}$se hace $u = a\ tg\theta$ para lo que $\sqrt{a^2 + u^2} = a\ Sec\theta$

Para $a^2 - u^2$ se hace $u = aSec\theta$ para lo que $a^2 - u^2 = aCos\theta$

4.5.1. Ejercicios ilustrativos

a. Ejercicio ilustrativo 1

Calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

Sea x = $aSec(\theta) \Rightarrow dx = aSec(\theta)Tan(\theta)\ do$

Como x = $aSec(\theta) \Rightarrow x^2 = a^2\ sec^2(\ \theta)$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} - a^2} = \int \frac{aSec(\theta)Tan(\theta)do}{\sqrt{a^2\ sec^2(\theta) - a^2}}$$

$$= \int \frac{aSec(\theta)Tan(\theta)do}{\sqrt{a^2(sec^2(\ \theta) - a^2}}$$

$$= \int \frac{a\ sec(\ \theta)Tan(\theta)do}{\sqrt{a^2\ Tan^2(\theta)}}$$

$$= \int \frac{a\, sec(\theta) Tan(\theta) do}{\alpha Tan^2(\theta)}$$

$$= \int Sec(\theta) d\theta$$

$$Ln|sec(\theta) + tan(\theta)| + C$$

Para volver a la variable inicial trabajamos con nuestro cambio de variable.

$$Sec(\theta) = \frac{h}{ca} = \frac{x}{a}$$

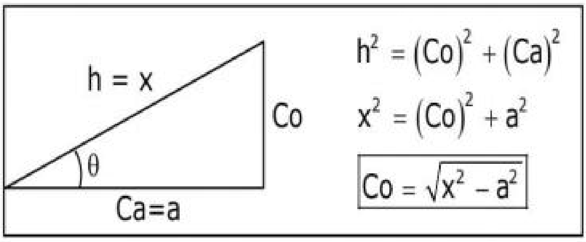


Figura 5. Teorema de Pitágoras.

$Tan(\theta) = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}$ y como $sec(\theta) = \frac{x}{a}$

Así nuestra integral original quedara como:

$$= Ln|sec(\theta) + tan(\theta)|$$

$$= Ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a}\right| + C$$

$$= Ln\left|x + \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a}\right| + C$$

$$= Ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| - Ln|a| + C$$

$$= Ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + k \text{ donde k} = -Ln|a| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = Ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + k$$

b. Ejemplo ilustrativo 2

Calcular $\int \frac{8dx}{4x^2+1}$

Observamos que $2x = z \Rightarrow 2dx = dz \Rightarrow dx = \frac{dz}{2}$ así nuestra integral original queda:

$$\int \frac{8dx}{4x^2+1} \qquad = \int \frac{8dx}{(2x)^2+1^2}$$

$$= \int \frac{8\frac{dx}{2}}{2^2+1^2}$$

$$= 4\int \frac{dz}{2^2 + 1^2}$$

Haciendo el camino de variable

$$z = Tg(\beta) \Rightarrow dz = sec^2(\beta)\, d\beta$$

$$= 4\int \frac{sec^2(\beta)d\beta}{Tg^2(\beta) + 1}$$

$$= 4 \int \frac{sec^2(\beta)d\beta}{Sec^2(\beta)^2}$$

$$= 4d\beta$$

$$= 4\beta + C$$

Para resolver a la variable inicial trabajamos con nuestro cambio de variable.

$$Tg(\beta) = z \Rightarrow \beta = Tg^{-1}(z)$$

Y como $z = 2x$entonces

$$\beta = T_g^{-1}(2x)$$

Así nuestra integral original quedara como:

$$\int \frac{8dx}{4x^2 + 1} = 4Tq^{-1}(2x) + C$$

c. Ejercicio ilustrativo 3

Calcular $\int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x^2} \cdot dx$

Se hace $x = \sqrt{3sen(a)} \Rightarrow dx = \sqrt{3}\, cos(\, a)dx$

Como $x = \sqrt{3sen}(a) \Rightarrow x^2 = 3sen^2(a)$

$$\int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x^2} \cdot dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{3-3sen^2(a)} \cdot \sqrt{3\cos(a)}da}{3sen^2(a)}$$

$$= \int \frac{\sqrt{3(1-sen^2(a)} \cdot \sqrt{3\cos(a)}da}{3sen^2(a)}$$

$$= \int \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{(1-sen^2(a))} \cdot \sqrt{3\cos(a)}da}{3sen^2(a)}$$

$$= \int \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{\cos 2\,(a)} \cdot \sqrt{3\cos 2\,(a)}da}{3sen^2(a)}$$

$$= \int \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}\sqrt{\cos^2(a)}da}{3sen^2(a)}$$

$$= \int \frac{(\sqrt{3})^2 \cdot \cos(a) \cdot \cos(a)da}{3sen^2(a)}$$

$$= \int \frac{\cos^2(a) \cdot da}{sen^2(a)}$$

$$= \int Ctg^2(a) \cdot da$$

$$= \int (csc^2(a) - 1) \cdot da$$

$$= \int csc^2(a) \cdot da - \int da$$

$$= -Ctg(a) - a + C$$

Para resolver a la variable inicial trabajamos con nuestro cambio de variable

$$sen(a) = \frac{co}{h} = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

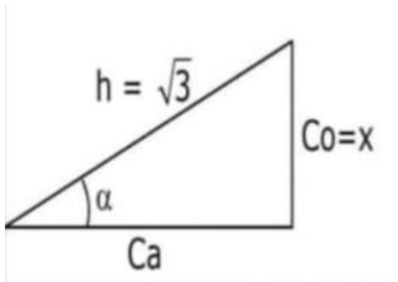


Ilustración 6. Triángulo equilátero

$$h^2 = (Co)^2 + (Ca)^2$$

$$(\sqrt{3})^2 = (x)^2 + Ca^2$$

$$Ca = \sqrt{3 - x^2}$$

$$cos = \frac{ca}{h} = \frac{\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3}} \text{y como } sen(a) = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

$$Ctg(a) \frac{cos}{sen \frac{\frac{\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3}}}{\frac{x}{\sqrt{3}}} \sqrt{3-x^2}^{-1} \frac{x}{\sqrt{3}}}$$

Así nuestra integral original quedara como:

$$= -ctg - (a) + C$$

$$= -\frac{\sqrt{3-x^2}}{x} - sen^{-1}(\frac{x}{\sqrt{3}}) + c$$

$$= \int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x^2} \cdot d = -sen^{-1}(\frac{x}{\sqrt{3}}) + C$$

d. Ejercicio ilustrativo 4

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$$

Paso 1: Sustitución trigonométrica

Para una integral de la forma propuesta, podemos utilizar una sustitución trigonométrica para simplificar la raíz cuadrada en el denominador. En este caso a=2 por lo que podemos hacer el cambio de variable:

$$x = 2sen\theta$$
$$Entonces, dx = 2\cos\theta\,, d\theta$$

Usando la sustitución tenemos:

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4sen^2\theta} = 2\cos\theta$$

Y también:

$$x^2 = (2sen\theta)^2 = 4sen^2\theta$$

Paso 2: Sustituye en la integral.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2\cos\theta\, d\theta}{4sen^2\theta \cdot 2\cos\theta}$$
$$Simplificado:$$
$$\int \frac{1}{4sen^2\theta} = \frac{1}{4}\int csc^2\theta\, d\theta$$

Paso 3: Integrar

$$\frac{1}{4}\int csc^2\,\theta\, d\theta = -\frac{1}{4}cot\,\theta + C$$

Paso 4: Regresar la variable original

$$cot\,\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

Por lo tanto:

$$-\frac{1}{4}cot\,\theta = -\frac{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}{4x} + C$$
$$x = 2tg\theta$$

e. *Ejercicio ilustrativo 5*

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{2}\int \frac{2\,sec^2\,\theta\, d\theta}{2\,tan\,\theta \cdot 2\,sec\,\theta}$$

$x\sqrt{x^2+4} = 2sen\theta$ $\qquad$ $dx = 2\,sec^2\,\theta\, d\theta$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{cos\,\theta}}{\frac{sen\theta}{cos\,\theta}}\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{cos\,\theta}{cos\,\theta\; sen\theta}\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{sen\theta}\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2}Ln|csc\,\theta - cot\,\theta| + C$$
$$= \frac{1}{2}Ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right| + C$$

Csc $\vartheta = \frac{x\sqrt{x^2+4}}{x}$ Ctg ϑ =2/x

- Se aplica el método de sustitución trigonométrica del caso 2
- Se realiza la simplificación y se pone el ½ adelante aplicando la regla #2
- Se resuelve la identidad trigonométrica
- Se soluciona con extremos por extremos y medios con medios
- Se simplifica los Cosenos
- Se integra la Identidad trigonométrica

f. *Ejercicio ilustrativo 6*

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}}$$

Paso 1:

Usamos la sustitución trigonométrica $x = 5\sin\theta$, por lo que $dx = 5\cos\theta\, , d\theta$

Paso 2: Sustituyendo en la integral tenemos:

$$\int \frac{5\cos\theta\, d\theta}{5\sin\theta\sqrt{25-(5\sin\theta)^2}}$$

$$= \int \frac{\cos\theta}{\sin\theta * 5\cos\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{1}{\sin\theta} d\theta = \frac{1}{5}\int \csc d\theta$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5}{x} - \sqrt{\frac{25-x^2}{x}}\right| + c$$

g. *Ejercicio ilustrativo 7*

$$\int \frac{\sec^2 x\, dx}{(4-\tan^2 x)^{3/2}}$$

Paso 1:

Observamos que la integral contiene una función en términos de $\tan x$, por lo que usaremos la sustitución $u = \tan x$. Entonces,$du = \sec^2 x\,, dx$

Paso 2:

Sustituyendo, la integral se convierte en:

$\int \frac{du}{(4-u^2)^{3/2}}$

Sustituyendo nuevamente, obtenemos:

$$\int \frac{2\cos\theta\, d\theta}{(4-4\sin^2\theta)^{3/2}}$$

$$= \int \frac{2\cos\theta\, d\theta}{(4\cos^2\theta)^{3/2}} = \int \frac{2\cos\theta}{8\cos^3\theta} d\theta$$

$$= \int \frac{1}{4\cos^2\theta} d\theta = \frac{1}{4}\int \sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\tan\theta + c$$

h. Ejercicio ilustrativo 8

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

Paso 1:

Usamos la sustitución trigonométrica, $x = a\sec\theta$ de modo que. $dx = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

Paso 2:

Sustituyendo en la integral, obtenemos:

$$\int \frac{a\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{\sqrt{(a\sec\theta)^2-a^2}}$$

$$\sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)} = \sqrt{a^2\tan^2\theta} = a\tan\theta$$

$$\int \frac{a\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{\sqrt{(a\sec\theta)^2 - a^2}} = \int \sec\theta\, d\theta$$

$$= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c$$

$$= \ln\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}\right| + c$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c$$

i. Ejercicio ilustrativo 9

$\int \frac{xdx}{\sqrt{4+x^2}}$

Paso 1:

Usamos la sustitución $u = 4 + x^2$. Entonces, $du = 2xdx$ o bien, $dx = \frac{du}{2}$Sustituyendo en la integral, tenemos:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{du}{\frac{2}{\sqrt{u}}} = \frac{1}{2}\int u^{-1/2}\, du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2u^{1/2} = \sqrt{u} + C$$

$$\sqrt{4+x^2} + C$$

4.5.2. Ejercicios propuestos

Tabla 12. Ejercicios propuestos.

N°	Integral	Respuesta

1	$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+4)^2}$	$\frac{1}{4}\arctan\frac{x}{2}-\frac{x}{2(x^2+4)}+C$
2	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$	$\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} 2x+C$
3	$\int \frac{dx}{\sqrt{4x+x^2}}$	$\operatorname{Ln}\left\|x+2+\sqrt{4x+x^2}\right\|+C$
4	$\int \frac{dx}{(5-4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{x+2}{9\sqrt{5-4x-x^2}}+C$
5	$\int \frac{e^x\,dx}{(e^{2x}+8e^x+7)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{-(e^x+4)}{9\sqrt{e^{2x}+8e^x+7}}+C$
6	$\int \frac{dx}{(4x^2-9)^{\frac{3}{2}}}$	$-\frac{1}{9}x(4x^2-9)^{-\frac{1}{2}}+C$
7	$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$	$\frac{1}{a}\ln\left\|\frac{x}{a+\sqrt{a^2+x^2}}\right\|$

CAPÍTULO V

5 CÁLCULO DEL ÁREA ENTRE UNA, DOS Y TRES CURVAS

El cálculo del área entre curvas es una aplicación fundamental del cálculo integral que permite cuantificar la región comprendida entre dos funciones en un intervalo determinado. Para determinar esta área, es necesario identificar las funciones que delimitan la región, establecer los puntos de intersección y calcular la integral definida de la diferencia entre la función superior y la inferior. Este enfoque es clave para resolver problemas geométricos y modelar situaciones del mundo real.

Cuando trabajamos con dos curvas, f(x) y g(x), donde f(x)≥g(x)f(x) en un intervalo [a, b], el área entre ellas se calcula mediante la integral definida:

$$A = \int_a^b [f(x_i) - g(x_i)]dx$$

Este concepto se extiende a casos más complejos, como regiones donde las curvas se cruzan, lo que requiere dividir el intervalo de integración según los puntos de intersección y considerar la función superior en cada subintervalo.

Además de las curvas en el plano cartesiano, este método puede aplicarse en coordenadas polares y en otros sistemas, permitiendo analizar regiones más complejas, como áreas delimitadas por curvas no rectilíneas. Estas técnicas amplían el alcance del cálculo integral para abordar problemas multidimensionales en geometría y física.

En la agroindustria, calcular áreas entre curvas tiene aplicaciones prácticas como la estimación de volúmenes de producción agrícola o reservas de agua. Por ejemplo, al modelar curvas de crecimiento de cultivos y consumo de recursos, se puede determinar la diferencia entre la oferta y la demanda de agua en un periodo. También se usa para evaluar terrenos no planos, optimizando siembras y mejorando la gestión de recursos naturales.

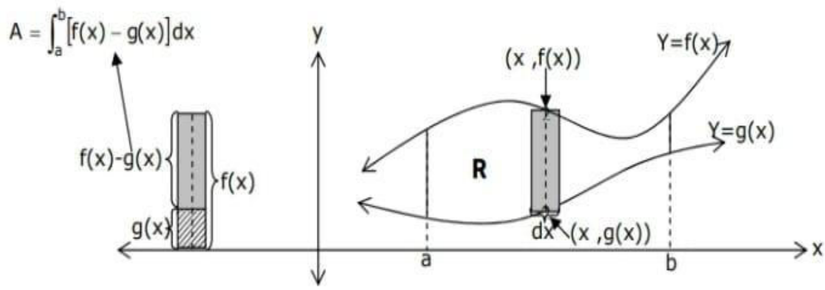


Figura 7. Representación del área entre curvas.

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta y_i \, \Delta x_i$$

$$A = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)] \, \Delta x_i$$

$$A = \lim_{x=0} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)] \, \Delta x_i$$

Entonces; como fórmulas finales quedarían:

Cuando y=f(x)

$$A = \int_a^b [f(x_i) - g(x_i)]dx$$

Cuando x=f(y)

$$A = \int_c^d [f(y_i) - g(y_i)]dy$$

5.1. Ejercicios ilustrativos

a. Ejercicio ilustrativo 1

Calcular el área entre las curvas $y = x^2 + 2x + 1 \ \wedge y = 3x + 3$

- **PASO N° 1**

- Buscar primero el vértice de la parábola con la siguiente ecuación $x = -\frac{b}{2a}$ (eje de simetría).
- Evaluar primero en la curva (parábola).
- Ejercicio de la forma $ax^2 + bx + c$

$$x = -\frac{2}{2(1)}$$
$$x = -\frac{2}{2}$$
$$x = -1$$

- Hallar el vértice evaluando el número (evaluando x en la función) $y = x^2 + 2x + 1$

$$y = x^2 + 2x + 1$$
$$y = (-1)^2 + 2(-1) + 1$$

$y = 0$

$V(-1{,}0)$

- **PASO N° 2**

- Buscar la intercepción de las dos gráficas, y para ello se resuelve en un sistema de ecuaciones.

$$y = x^2 + 2x + 1$$
$$y = 3x + 3$$

- Método de igualación.

$$x^2 - 2x + 1 = 3x + 2$$
$$x^2 + 2x - 3x + 1 - 3 = 0$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$

- Factorizar

$$(x - 2)(x + 1) = 0 \quad x - 2 = 0$$
$$x = 2 \quad x + 1 = 0$$
$$x = -1$$

- Evaluar x en la ecuación más sencilla, en este caso en $y = 3x + 3$

$$y = 3x + 3$$
$$y = 3(2) + 3$$
$$y = 9$$

- $(2{,}9)$

$$y = 3x + 3$$
$$y = 3(-1) + 3$$

$$y = 0$$

$$\bullet\ (-1{,}0)$$

- **PASO N° 3**

- Construir la gráfica.
- Primero, se debe empezar la gráfica de acuerdo con los puntos del vértice.
- Segundo, graficar la recta y la parábola.

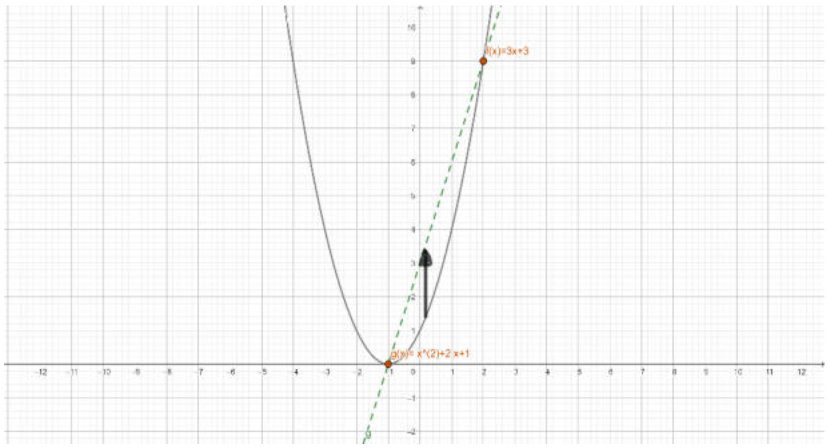


Figura 8. Gráfica de la parábola con una recta.

- Tercero, hallar el área de las curvas con su fórmula.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

- Se sustituye los valores en la fórmula antes mencionada.

$$A = \int_{-1}^{2} [3x + 3 - x^2 - 2x - 1]\, dx$$

$$A = \int_{-1}^{2} [-x^2 + x + 2]\, dx$$

- Integrar regla 3, 2 y 1 (directo)

$$A = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \Big]_{-1}^{2}$$

- Evaluar (primero límite superior menos el límite inferior).

$$A = -\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2(2) + \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 2(-1)$$
$$A = \frac{9}{2} u^2$$

b. Ejercicio ilustrativo 2

Calcular el área entre las curvas $y = x^3 + 3x^2 + 2x \wedge y = 2x^2 + 4x$

- **Solución**

Primero, hacer los cálculos respectivos para poder calcular

$$y = x^3 + 3x^2 + 2x$$
$$Si$$
$$0 = x^3 + 3x^2 + 2x$$
$$x(x^2 + 3x + 2) = 0 \}$$
$$x(x+2)(x+1) = 0$$
$$x = -2 \quad x = -1$$

1er punto $(0,0)$

2do punto $(-2,0)$

3er punto $(-1,0)$

Figura 9. Puntos representativos.

Eje de Simetría

$$y = 2x^2 + 4x$$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$x = \frac{-4}{2(2)}$$

$$x = -1$$

Evaluar en la ecuación el valor obtenido:

$$y = 2(-1)^2 + 4(-1)$$

$$y = 2 - 4$$

$$y = -2$$

Entonces, el punto obtenido sería: $v = (-1, -2)$

Formar el sistema de ecuaciones para hallar las intersecciones

$$\begin{cases} y = x^3 + 3x^2 + 2x \\ y = 2x^2 + 4x \end{cases}$$

igualar; $x^3 + 3x^2 + 2x = 2x^2 + 4y$

$$x^3 + 3x^2 - 2x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$x^3 + x^2 - 2x = 0$$

$$x(x^2 + x - 2) = 0$$

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$x = -2 \quad x = 1$$

Puntos de intersección

$(-2,0); (1,6)$

Graficar:

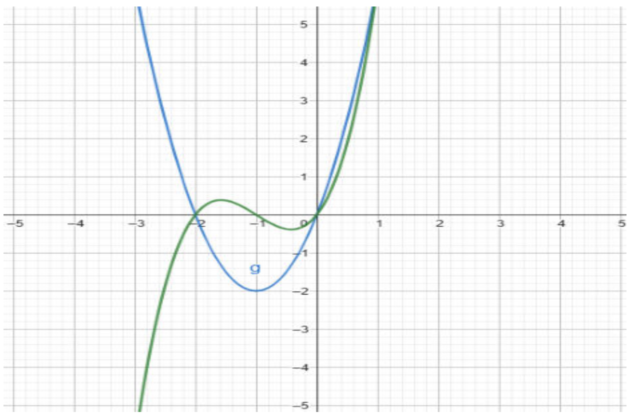


Figura 10. Gráfica de la intersección de las funciones

Segundo paso, una vez identificada la gráfica, procedemos a calcular su área mediante la fórmula:

$$A = \int_a^b [f(x_i) - g(x_i)]dx$$

Reemplazamos datos y resolvemos

$$A_1 = \int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x)dx$$

$$A_1 = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\Big]_{-2}^{0}$$

$$A_1 = 0 - \left[\frac{(-2)^4}{4} + \frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2\right]$$

$A_1 = \frac{8}{3}$ $\qquad A_2 = \int_0^1 (-x^3 - x^2 + 2x)dy$

$$A_2 = \frac{-x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2\Big]_0^1$$

$$A_2 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 - 0$$

$A_2 = \frac{5}{12}$

$$\boxed{\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ A &= \frac{8}{3} + \frac{5}{12} \\ A &= \frac{37}{12}u^2 \end{aligned}}$$

c. *Ejercicio ilustrativo 3*

Calcular el área entre las curvas $y = -x^2 + 4x - 6 \quad \wedge \quad y = -2x + 1$

- **Solución**

Primer paso, realizar la gráfica mediante los métodos ya aprendidos

$$y = -x^2 + 4x - 6$$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$x = \frac{-4}{2(-1)}$$

$$x = 2$$

$$\boxed{v = (2, -2)}$$

evaluar; $y = -(2)^2 + 4(2) - 6$

$$y = -2$$

Realizamos en sistema de ecuaciones para hallar las intersecciones:

$\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 6 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$ igualar; $-x^2 + 4x - 6 = -2x + 1$

$$-x^2 + 4x + 2x - 6 - 1 = 0$$

$$(-) - x^2 + 6x - 7 = 0$$

$$x^2 - 6x + 7 = 0$$

Aplicamos fórmula general porque no es posible resolverla por medio de factorización.

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(7)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 68}}{2}$$

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{8}}{2} \qquad x_2 = \frac{6 - \sqrt{8}}{2}$$

$$x_1 = 4,4 \qquad x_2 = 1.58$$

Puntos de Intersección

$$(4{,}4; -7{,}8)$$
$$(4{,}6; -2{,}2)$$

evaluar; $y_1 = -2(4{,}4) + 1$

$$y_1 = -7.8$$

$$\boldsymbol{y_2 = -2(1,6) + 1}$$

$$y_2 = -2{,}2$$

Graficar:

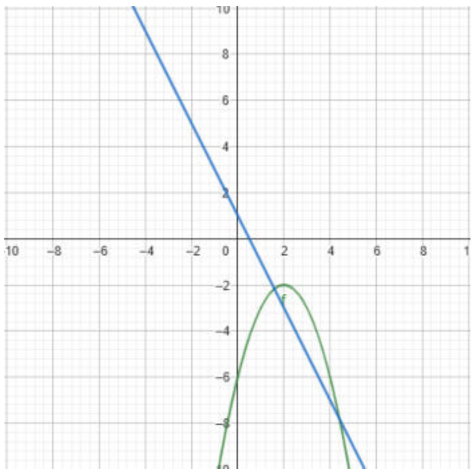


Figura 11. Gráfica de las intersecciones de las funciones

Segundo paso, una vez identificada la gráfica, procedemos a calcular su área mediante la fórmula:

$$A = \int_a^b [f(x_i) - g(x_i)]dx$$

Reemplazamos datos y resolvemos

$$A = \int_{1,6}^{4,4} [-x^2 + 6x - 7]dx$$

$$A = \frac{-x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 7x\bigg]_{1,6}^{4,4}$$

$$A = \frac{-(1,6)^3}{3} + \frac{6(1,6)^2}{2} - 7(1,6) - \left[-\frac{(4,4)^3}{3} + \frac{6(4,4)^2 2}{2} - 7(4,4)\right]$$

$$A = 3,8u^2$$

5.2. Integrales que contienen a$x^2 + bx + c$ (Complementación de cuadrados)

5.2.1. Complementación de cuadrado

El procedimiento de completar el cuadrado, también llamado complementación de cuadrados es un recurso de álgebra elemental para convertir la expresión de un trinomio de segundo grado, desde su forma ordinaria $ax^2 + bx + c$.

- **Ejemplos**

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + 2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$x^2 - 6x + 2$$

$$\text{Formula 1:} = \left(x - \tfrac{6}{2}\right)^2 + 2 - (3)^2$$

$$= (x - 3)^2 + 2 - 9$$

$$= (x-3)^2 - 7$$

$$x^2 + 3x - 1 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 1 - \frac{9}{4}$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$$

Formula 2: $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right)$

$cona \neq 1$ $\quad =a\left|\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right|$

$3x^2 + 6x - 7$ $\quad = 3\left(x^2 + \frac{6}{3}x - \frac{7}{3}\right)$

$$= 3\left(x^2 + 2x - \frac{7}{3}\right)$$

$$= 3\left|\left(x^2 + \frac{2}{2}\right)^2 - \frac{7}{3} - \left(\frac{2}{2}\right)^2\right|$$

$$= 3\left|(x+1)^2 - \frac{7}{3} - 1\right|$$

$$= 3\left|(x+1)^2 - \frac{10}{3}\right|$$

$$= 3(x+1)^2 - 10$$

5.2.2. Complementación de cuadrado con integrales

La complementación de cuadrados se utiliza para completar integrales cuando el integrando no se puede integrar de manera directa.

- **Ejemplo**

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x - 2} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - 2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2}$$

$$u = x + \frac{5}{2} \qquad\qquad = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - 2 - \frac{25}{4}}$$

$$du = dx \qquad\qquad = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{5}{2}\right)2 - \frac{33}{4}}$$

$$a^2 = \frac{33}{4} \qquad\qquad = \int \frac{du}{u \quad + \frac{33}{4}}$$

$$a = \frac{\sqrt{33}}{2} \qquad\qquad = \frac{1}{a2} Ln \left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2\frac{\sqrt{33}}{9}} Ln \left| \frac{u - \frac{\sqrt{33}}{2}}{u + \frac{\sqrt{33}}{2}} \right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{33}} Ln \left| \frac{x + \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}}{x + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}} \right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{33}} Ln \left| \frac{x + \frac{5-\sqrt{33}}{2}}{x + \frac{5+\sqrt{33}}{2}} \right| + C$$

a. *Ejercicios ilustrativos*

$$7. \int \frac{dx}{8 + 2x + x^2} = \int \frac{(1-x)dx}{\sqrt{-x^2 + 2x + 8}}$$

$$= \int \frac{(1-x)dx}{-1(x^2+2x-8)}$$

La expresión en denominador es $8 + 2x + x^2$, generalmente se organiza la forma cuadrática en la forma estándar $ax^2 + b + C$, con los términos en orden de grado desde el más alto hasta el más bajo.

Luego, factorizamos el signo negativo fuera de los términos que involucran a x, así, ponemos un paréntesis alrededor de la expresión cuadrática.

$$= \int \frac{(1-x)dx}{\sqrt{-1[(x-1)^2 - 8 - 1]}}$$

$$= \int \frac{(1-x)dx}{\sqrt{-1[(x-1)^2 - 9]}}$$

$$= \int \frac{(1-x)dx}{\sqrt{9-(x-1)^2}}$$

Identificar el término cuadrático y el término lineal, la expresión que tenemos es $8 + 2x + x^2$, el término cuadrático es x^2 y el término lineal es $-2x$. Tomar el coeficiente del término lineal, observamos que el coeficiente del término x es -2, dividir el coeficiente del término lineal entre 2, para completar el cuadrado, tomamos el coeficiente de x (que es -2) y lo dividimos entre 2, este valor sale a -1, agregar y restar este valor en la expresión para que no cambie el valor de la expresión, añadimos y restamos el número 1 en la expresión. Simplificar los términos constante -1 $\vee$ -8. Y el resultado es $\sqrt{9-(x-1)^2}$.

$$u = x - 1; du = dx; x = u + 1$$

$= \int \frac{[1-(u+1)]}{\sqrt{9-u^2}}$

Sustitución para simplificar la integral, usamos la sustitución u=x-1, lo cual implica que du=dx y x=u+1x. Con esta sustitución, la integral se transforma en $\int \frac{[1-(u+1)]du}{\sqrt{9-u^2}} = \int \frac{(1-u-1)du}{\sqrt{9-u^2}}$simplificamos el numerador y quedaría $\int \frac{-udu}{\sqrt{9-u^2}}$

$$= \int \frac{-udu}{\sqrt{9-u^2}}$$

$$y = 9 + u^2; y = -2u; -y = 2u; \frac{dy}{2}$$

$$= -udu$$

$$= \int \frac{\frac{dy}{2}}{\sqrt{y}}$$

$$= \frac{1}{2} \int y^{-1/2}\, dy$$

$$= \frac{1}{2} \frac{y^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}$$

$$Y^{1/2} + C$$

$$= \sqrt{9 - U^2} + C$$

$$= \sqrt{9 - (X-1)^2} + C$$

Método de sustitución para resolver la integral nuestra derivada respecto a y= 9+ $y = 9 + u^2$; y= $-2u$; $-y = 2u; \frac{dy}{2} = -u\, du$ sustituyendo la integral

$\int \frac{-u\,du}{\sqrt{9-u^2}} = \int \frac{\frac{dy}{2}}{\sqrt{y}}$ el ${dy}/{2}$ lo ponemos atrás de la integral y la raíz pasa a ser $-{1}/{2}$, así queda nuestra ecuación $\frac{1}{2}\int y^{-1/2}\,dy$

Se aplica la primera regla que es la suma de potencias se agrega $+1$ a las potencias, al final queda $y^{1/2} + c$ y se lo remplaza y nos queda.

$$\sqrt{9-(x-1)^2} + c$$

5.2.3. Ejercicios propuestos

Tabla 13. Ejercicios propuestos.

Integral	**Respuesta**	**Integral**	**Respuesta**
1. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$	$\frac{1}{2} arc\ \mathrm{sen}\ 2x + C$	8. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x^2}}$	$\frac{\sqrt{5}}{5} arcsen \frac{\sqrt{10}}{2} + C$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$	$\frac{1}{3}\mathrm{arcsen}\frac{3x}{2} + C$	9. $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$	$\frac{1}{2}\arctan\frac{x-1}{2} + C$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$	$\mathrm{arcsen}(x-1) + C$	10. $\int \frac{r\,dr}{\sqrt{16-9r^2}}$	$\frac{1}{6}\mathrm{arcsen}\frac{3r^2}{4} + C$
4. $\int \frac{(1-x)dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$	$\sqrt{8+2x-x^2} + C$	11. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$	$2\arctan\sqrt{x} + C$
5. $\int \frac{dx}{9x^2+16}$	$\frac{1}{12}\arctan\frac{3x}{4} + C$	12. $\int \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$	$\frac{1}{\sqrt{7}}\arctan\frac{e^x}{\sqrt{7}} + C$
6. $\int \frac{dx}{4x\sqrt{x^2-16}}$	$\frac{1}{16}\mathrm{arcsec}\frac{x}{4} + C$	13. $\int \frac{dx}{x^2-x+2}$	$\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{7}} + C$

7. $\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 2}$	$\frac{1}{2} arc \tan(2x + 1)$ $+ C$

5.3. Introducción a las aplicaciones de las integrales

Las integrales permiten calcular áreas bajo curvas, volúmenes de sólidos de revolución, calcular masas y centros de masas de regiones con distribución de masa no uniforme, calcular los momentos de inercia y resolver problemas relacionados con la acumulación de cantidades. Su importancia radica en su capacidad para simplificar cálculos que, de otro modo, serían tediosos y laboriosos.

5.3.1. Áreas y volúmenes

Una de las aplicaciones más comunes de las integrales es el cálculo de áreas y volúmenes. La integral definida se utiliza para determinar el área bajo una curva o entre dos curvas, así como el volumen de sólidos generados al rotar una figura plana alrededor de un eje. Esta aplicación es fundamental en campos como la ingeniería civil y la arquitectura, donde se requiere calcular dimensiones precisas para estructuras.

5.3.2. Física y movimiento

En física, las integrales son cruciales para analizar el movimiento. Se utilizan para calcular trabajo realizado por fuerzas variables y para determinar la posición de un objeto en función del tiempo. Por ejemplo, el trabajo realizado por una fuerza se puede encontrar integrando la fuerza respecto a la distancia. Además, en mecánica de fluidos, se aplican integrales para calcular fuerzas y presiones en fluidos en movimiento.

5.3.3. Economía y estadística

En economía, las integrales se utilizan para modelar funciones de costo y utilidad, permitiendo a los economistas maximizar beneficios y minimizar costos. También son fundamentales en estadística para calcular probabilidades a partir de funciones de densidad de probabilidad. La integral permite determinar la probabilidad de que una variable aleatoria continua caiga dentro de un intervalo específico.

5.4. Libros relevantes

5.4.1. Cálculo integral con aplicaciones

- **Autores:** Frank Ayres y Elliot Mendelson.

Este libro aborda cómo las integrales son aplicadas en diversas áreas como el cálculo del área bajo curvas y volúmenes de sólidos. Se enfoca en mejorar las habilidades prácticas necesarias para resolver problemas.

5.4.2. Introducción a soluciones integrales con programación

- **Autores:** Ember Zumba y Emily Trávez.

Este texto explora cómo utilizar programación para resolver integrales, destacando su aplicabilidad en física e ingeniería. Se discuten métodos que permiten abordar problemas complejos mediante integración.

5.4.3. Aplicaciones de las integrales

- **Fuente:** Estudio sobre aplicaciones integrales.

Este documento detalla cómo las integrales son fundamentales no solo en ingeniería sino también en administración y otras áreas, proporcionando ejemplos prácticos sobre su uso en análisis poblacional y propagación de información.

5.4.4. Cálculo diferencial e integral

- **Autores:** Purcell, Varberg y Rigdon.

Esta obra abarca una amplia gama de temas relacionados con el cálculo integral, incluyendo aplicaciones prácticas como el cálculo del área, volúmenes de sólidos y momentos. Además, presenta técnicas de integración y su relevancia en la resolución de problemas matemáticos.

5.5. Longitud de curvas o arcos

5.5.1. Fórmula para calcular la longitud de la curva

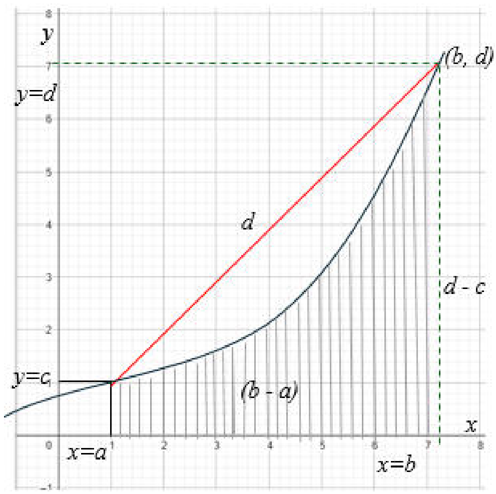


Figura 12. Área bajo la curva.

$c^2 = a^2 + b^2$ Aplicando Pitágoras

$$d^2 = (d - c)^2 + (b - a)^2$$

$$d = \sqrt{(d - c)^2 + (b - a)^2}$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta {x_i}^2 + \Delta y_i^2}$$

$$d = \lim_{x=0} \sum_{i=0}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$$

La distancia entre los puntos a y b se expresaría como:

$$d = \int_{a}^{b} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\,\frac{\Delta x}{\Delta x}$$

$$d = \int_{a}^{b} \sqrt{\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\Delta x^2}}\,\Delta x$$

$$d = \int_{a}^{b} \sqrt{\frac{\Delta x^2}{\Delta x^2} + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}\,\Delta x$$

Entonces, como formulas finales quedarían:

Cuando $y = f(x) d = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

Cuando $x = f(y) \quad d = \int_{c}^{d} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$

a. Ejemplo ilustrativo 1

Calcular la longitud de la curva $y = x^2 - 4$desde $x = 0$hasta $x = 4$

- **Solución**

Primero hallar la derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 - 4)$$
$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Reemplazar en la fórmula y resolver la integral:

$$d = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$d = \int_0^4 \sqrt{1 + (2x)^2}dx$$

Realizamos cambio de variable

$$u = 2x$$
$$du = 2dx$$
$$\frac{du}{2} = dx$$

Reemplazamos

$$d = \int_0^4 \sqrt{1 + u^2}\frac{du}{2}$$
$$d = \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{1 + u^2}\, du$$

Resolvemos la integral por tabla, número 27

$$d = \frac{1}{2}\left[\frac{u}{2}\sqrt{1 - u^2}\right.$$
$$\left. + \frac{a^2}{2} ln \left|u + \sqrt{1 + u^2}\right|\right]_0^4$$
$$d = \frac{1}{2}\left[\frac{2x}{2}\sqrt{1 - (2x)^2}\right.$$
$$+ \frac{1}{2} ln \left|2x\right.$$
$$\left.\left. + \sqrt{1 + (2x)^2}\right|\right]_0^4$$

$$d = \frac{2x}{4}\left[\sqrt{1-(2x)^2} + \frac{1}{4} ln \left|2x + \sqrt{1+(2x)^2}\right|\right]_0^4$$

Evaluar:

$$d = \frac{2(4)}{2}\sqrt{1-\left(2(4)\right)^2} + \frac{1}{4} ln \left|2(4) + \sqrt{1+\left(2(4)\right)^2}\right| - \frac{2(0)}{2}\sqrt{1-\left(2(0)\right)^2} - \frac{1}{4} ln \left|2(0) + \sqrt{1+\left(2(0)\right)^2}\right|$$

$$d = \frac{8}{2}\sqrt{1-(8)^2} + \frac{1}{4} ln \left|8 + \sqrt{1+(8)^2}\right| - \frac{0}{2}\sqrt{1-(0)^2} - \frac{1}{4} ln \left|0 + \sqrt{1+(0)^2}\right|$$

$$d = 2\sqrt{64} + \frac{1}{4} ln\left|8 + \sqrt{65}\right| - 0$$

$$d = 16{,}81u$$

b. Ejercicio ilustrativo 2

Calcular la longitud de la recta $y = 3x$desde el punto $(1,3)$al punto $(1,6)$.

- **Solución**

Primero hallar la derivada y reemplazar en la fórmula

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}3x$$

$$\frac{dy}{dx} = 3$$

$$d = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$d = \int_1^1 \sqrt{1 + (3)^2} dx$$

$$d = 0u$$

Como el resultado da cero al momento de evaluar, no es factible que la función sea $y = f(x)$ por ende se procede a invertirla y pasarla a ser $x = f(y)$.

Se procede hallar la derivada y reemplazar en la formula

$$y = 3x$$

$$\frac{y}{3} = x \quad \Big\} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{3}$$

$$d = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$d = \int_3^6 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}\, dy$$

$$d = \sqrt{\frac{10}{9}} \int_3^6 dy$$

$$d = \frac{\sqrt{10}}{3} y \Big]_3^6$$

Evaluar:

$$d = \frac{\sqrt{10}}{3}(6) - \frac{\sqrt{10}}{3}(3)$$

$$d = 2\sqrt{10} - \sqrt{10}$$

$$d = \sqrt{10}u$$

c. Ejercicio ilustrativo 3

Calcular la longitud de $9y^2$=$4x^3$ en los puntos $(0,0)$ y $(3,2\sqrt{3})$

- **Solución**

$$9y^2 = 4x^3$$
$$y^2 = \frac{4}{9}x^3$$
$$\sqrt{y} = \sqrt{\frac{4}{9}x^3}$$
$$y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} * \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{dy}{dx} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$u = 1 + x$$
$$du = dx$$

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx$$
$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + x}\, dx$$
$$L = \int_0^3 U^{\frac{1}{2}}\, du$$
$$L = \frac{2}{3}U^{\frac{3}{1}}\Big]_0^3$$
$$L = \frac{2}{3}(1 + x)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^3$$
$$L = \frac{2}{3}(1 + 3)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1 + 0)^{\frac{3}{2}}$$
$$L = \frac{16}{3} - \frac{2}{3}$$
$$L = \frac{14}{3}U$$

5.5.2. Sólidos de rotación

a. Volumen de un sólido de rotación

Es un sólido que se obtiene al girar una región en un plano alrededor de una recta en el plano llamada eje de revolución, la cual toca la frontera de la región, o no corta la región en un punto Ejemplos:

- Si la región limitada por una semicircunferencia y su diámetro se hace girar sobre sí mismo se genera una esfera (Fig. No. 1).
- Si la región acotada por un triángulo rectángulo se hace girar sobre uno de sus catetos se genera un cono recto circular (Fig. No.2).

Fig. No.1

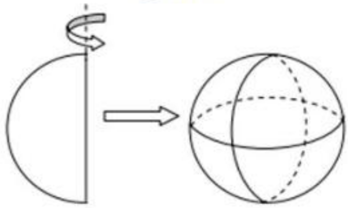


Fig. No.2

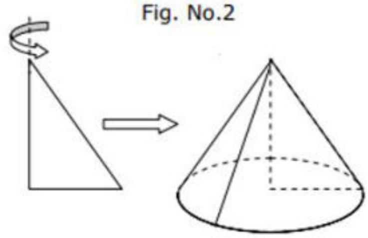


Figura 13. Sólidos de rotación.

Volumen de un sólido de Revolución. Método del Disco Este método se usa cuando el eje de revolución es una frontera de la región que se hace girar y el rectángulo auxiliar es perpendicular al eje de revolución.

Definición: Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$ y $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$. Si denotamos por S el solidó de revolución obtenido el girar alrededor del eje x la región limitada por la curva y =f(x) el eje x y las rectas verticales x=a ∧ x=b y si el volumen del solido de revolución S lo denotamos por V unidades cúbicas entonces:

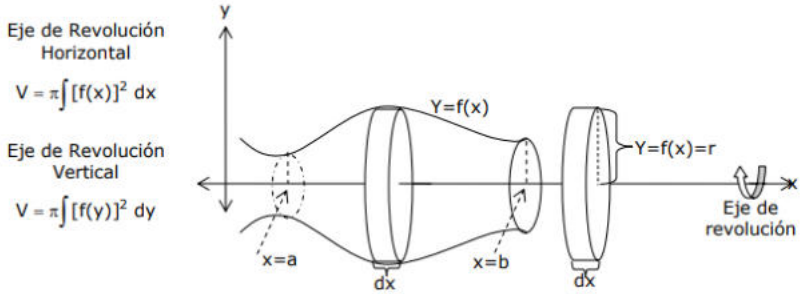


Figura 14. Eje de rotación.

5.6. Método de los discos

$$V_i = \pi R^2$$

$$V_i = \pi f^2(x_i)$$

$$V = \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(x_i)$$

$$V = \lim_{x \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(x_i)$$

$$V = \int_a^b \pi f(x) dx$$

$$V = \pi \int_a^b [F(x)]^2 dx$$

$$V = \pi \int_a^b [F(x)]^2 dx \qquad \vee \qquad V = \pi \int_c^d [F(y)]^2 dy$$

De acuerdo al eje entorno al cual gire la curva, si es el eje x o el eje y.

a. Ejercicio ilustrativo 1

Hallar el volumen del solido de rotación que se forma al girar alrededor del eje x la región acotada por la curva:

$$f(x) = x^3, y = 0 \wedge x = 2$$

$$y = 3$$

$$f(x) = x^3$$

$$\text{Si } x = 2, entonces$$

$f(2) = 8$ →nos da el punto (2,8)

Si $y = 0, entonces$

$$0 = x^3$$

$x = 0$ →nos da el punto (0,0)

$$V = \pi \int_a^b [F(x)]^2 dx$$

$$V = \pi \int_a^b [F(x)^3]^2 dx$$

$$V = \frac{x^7}{7}\bigg]_0^2$$

$$V = \pi \frac{2^7}{7} u^3$$

$$V = \frac{128}{7}\pi u^3$$

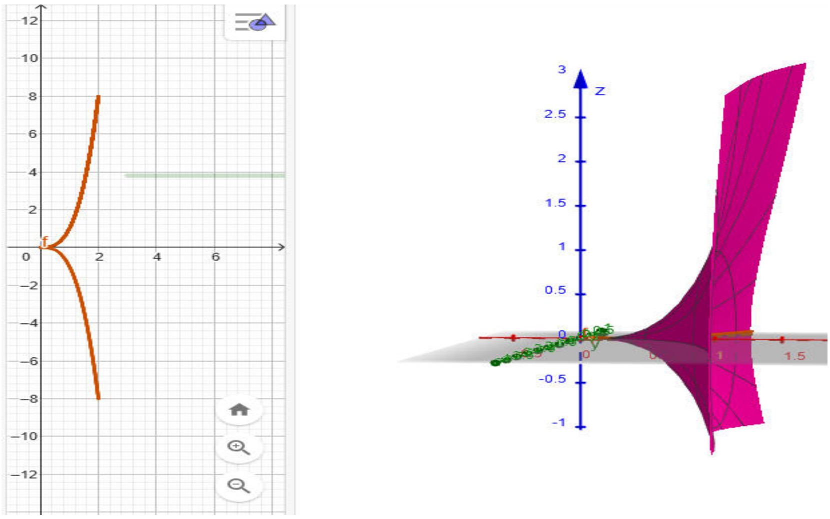


Figura 15. Representación gráfica de la función.

b. Ejercicio ilustrativo 2

Hallar el volumen del solido de rotación que se forma al girar alrededor del eje y la función $f(x) = x^3, y = 0 \wedge x = 2$

$$f(y) = x^3$$

$$y = x^3$$

$$x = \sqrt[3]{y}$$

$$x = y^{1/3}$$

$$V = \pi \int_c^d \left[F(y^{1/3})\right]^2 dy$$

$$V = \pi \int_0^8 \left[F(y)^{2/3}\right]^2 dy$$

$$V = \int y^{2/3} dy$$

$$V = \pi \frac{3}{5} y^{5/3}$$

$$V = \pi \frac{3}{5} \cdot 8^{5/3}$$

$$V = \frac{3}{5} \pi \cdot 32u^3$$

$$V = \frac{96}{5} \pi u^3$$

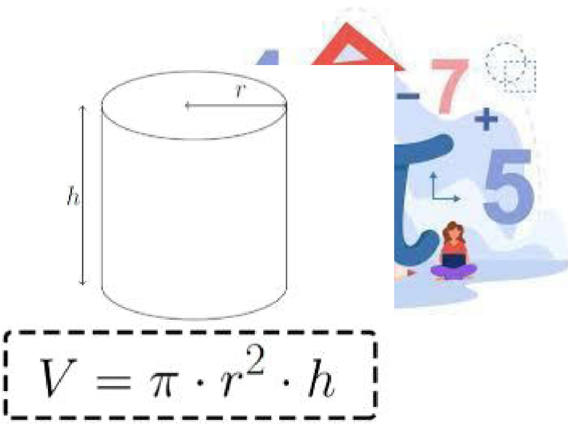


Figura 16. Fórmula del Volumen de un cilindro.

$$A = \pi(2)^2(h)$$

$$A = 32\pi u^3$$

$$V = V_0 - V_f$$

$$V = 32\pi - \frac{96}{5}\pi$$

$$V = \frac{64}{5}\pi u^3$$

c. *Ejercicio ilustrativo 3*

Hallar el volumen del solido de rotación que se forma al girar alrededor del eje y la función $f(x) = x^3, y = 0 \wedge x = 8$

$$f(y) = x^3$$

$$y = x^3$$

$$x = \sqrt[3]{y}$$

$$x = y^{1/3}$$

$$V = \pi \int_c^d \left[F(y^{1/3})\right]^2 dy$$

$$V = \pi \int_0^8 \left[F(y)^{2/3}\right]^2 dy$$

$$V = \int y^{2/3} dy$$

$$V = \pi \frac{3}{5} y^{5/3}$$

$$V = \pi \frac{3}{5} \cdot 8^{5/3}$$

$$V = \frac{3}{5}\pi \cdot 32u^3$$

$$V = \frac{96}{5}\pi u^3$$

5.7. Ecuaciones diferenciales y modelos matemáticos

Un modelo matemático describe teóricamente un objeto que existe fuera del campo de las matemáticas. Su éxito o fracaso depende de la precisión con la que se construya esta representación numérica y la confiabilidad con que se representen hechos o situaciones en forma de variables relacionadas entre sí. El éxito o fracaso del modelo depende de la precisión con la que se construya esta representación numérica, la fidelidad con la que se concreticen hechos y situaciones naturales en forma de variable.

Un ejemplo sencillo de aplicación de un modelo matemático algebraico de sistemas de ecuaciones lineales en dietas. En este caso en particular en una dieta basada en carnes roja y pescado, la cual solo se puede consumir 183 grs. de proteínas y 93 grs. de hidratos de carbono.

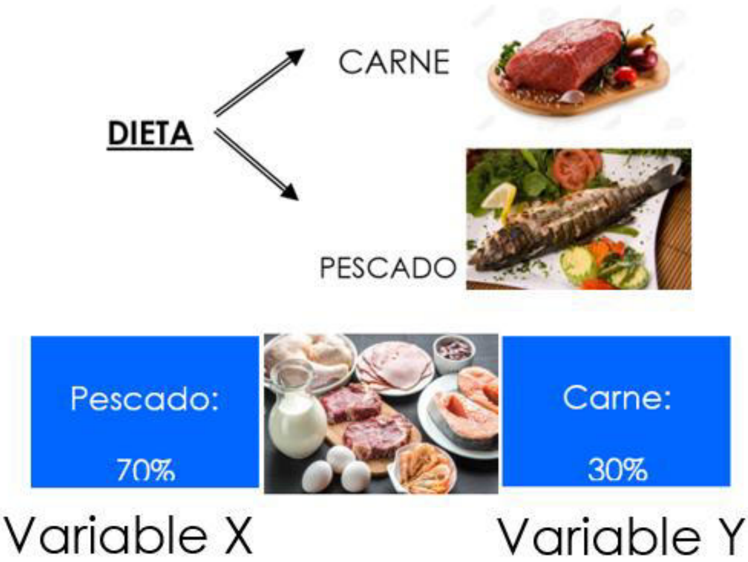


Figura 17. Dieta de a base de pescado y carne.

Formando el sistema de ecuaciones con los factores indicados y las variables podemos obtener:

$$\begin{cases} 0{,}7x + 0{,}3y = 183 \\ 0{,}1x + 0{,}6y = 93 \end{cases}$$

La 2da ecuación por (7) y la 1era ecuación por (-1)

$$\begin{cases} -0{,}7x - 0{,}3y = -183 \\ 0{,}7x + 4{,}2y = 651 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos

$$0 + 3{,}9y = 468$$

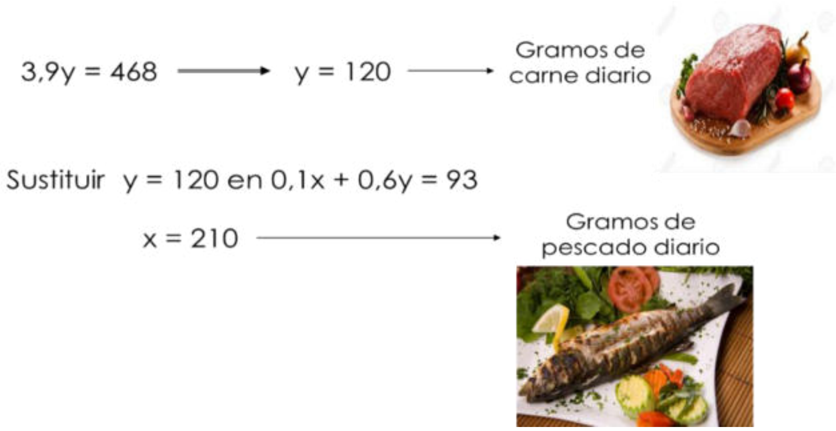


Figura 18. Resultados en gramos diarios

5.8. Fases de un modelo matemático

- Construcción: Es el proceso en que se convierte el objeto en lenguaje matemático
- Análisis: Es el estudio del modelo confeccionado.
- Interpretación: Es donde se aplican los resultados del estudio al objeto del cual se partió

5.8.1. Clasificación de los modelos matemáticos

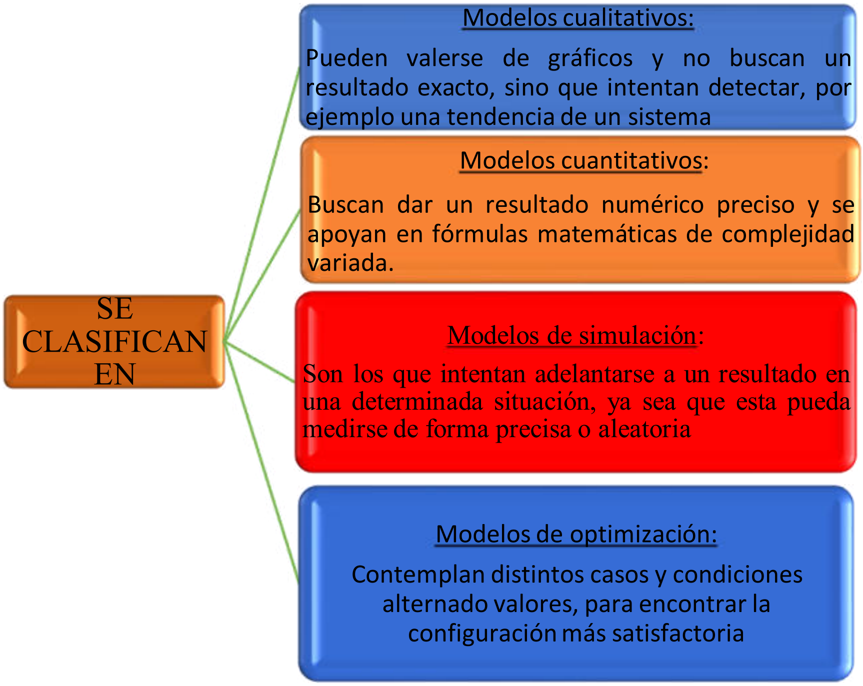


Figura 19. Clasificación de modelos matemáticos.

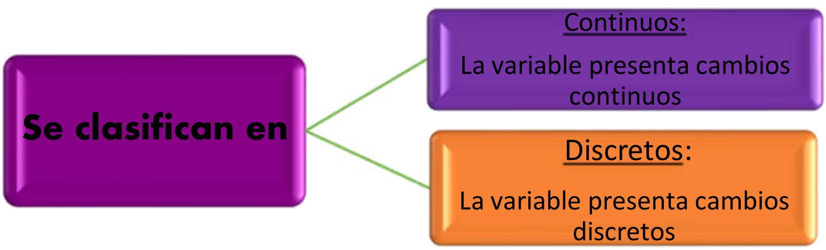


Figura 20. Clasificación de los modelos.

5.8.2. Elementos de un modelo matemático

- Parámetro: En el modelo son objetos o símbolos que representan entidades o atribuciones del sistema que permanecen constante.

- Variables: Son objetos o símbolos en el modelo, que representan a entidades o atributos del sistema que cambian en el tiempo.

- Relaciones funcionales: Son los procesos físicos o relaciones entre los símbolos de un modelo, que representan las actividades y a las relaciones entre los elementos de un sistema.

5.9. Ecuaciones diferenciales

- **Definición:** Una ecuación diferencial es una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.

Clasificación de las ecuaciones diferenciales: Las ecuaciones diferenciales se clasifican de acuerdo con su tipo, orden y linealidad.

- **Según su tipo:** Si una ecuación sólo contiene derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, entonces se dice que es una ecuación diferencial ordinaria.

Ejemplo: Ordinaria y parciales

$\frac{dy}{dx} + 10y = e^x$ Ordinaria y $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ En derivadas parciales

- **Según el orden:** El orden de una ecuación diferencial (ordinaria o en derivadas parciales) es el de la derivada de mayor orden en la ecuación.

a. *Ejemplo*

$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 10y = e^x$ Esta ecuación diferencial es de segundo orden por $\frac{d^2y}{dx^2}$

- **Según la linealidad o no linealidad:** Se dice que una ecuación diferencial de la forma (*), es lineal si se puede escribir de la forma (**).

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

b. Ejemplo

$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{dy}{dx} + 6y = e^x$ Es una ED lineal por no tiene potencias ninguna derivada

5.9.1. Ecuaciones diferenciales lineales

- **Definición:** Una ecuación diferencial es lineal de primer orden, si es de la forma $a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$ y al dividir ambos lados de la ecuación por $a_1(x)$ se obtiene una forma más útil, la forma estándar de una ecuación lineal $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$
- **Proceso de resolución:** Método del factor integrante

Para resolver una ecuación lineal de primer orden, primero se convierte a la forma de estándar; esto es, se hace que el coeficiente de dy/dx sea la unidad, es decir se divide toda la ecuación para $a_1(x)$.

- Hay que identificar P(x) y definir el factor integrante

$$e^{\int P(x)dx}$$

- La ecuación obtenida en el paso 1 se multiplica por el factor integrante

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx}+e^{\int P(x)dx}P(x)y$$
$$=e^{\int P(x)dx}f(x)$$

- Se integran ambos lados de la ecuación obtenida en el paso 4, es decir.

$$e^{\int P(x)dx}y=\int e^{\int P(x)dx}f(x)dx$$

5.9.2. Ejercicios ilustrativos

a. Ejemplo ilustrativo n°1

Resolver la ecuación $x\frac{dy}{dx}-4y=x^6e^x$

Solución: Como la ED no está de forma estándar se procede a dividirla para x

$$x\frac{dy}{dx}-4y=x^6e^x$$
$$\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}y=\frac{x^6e^x}{x}$$

$\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}y=x^5e^x$ Se aplica división de potencia de igual base

Luego se determina el factor integrante

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\int -\frac{4}{x}dx}$$

$$= e^{-4\int\frac{dx}{x}}$$

$$= e^{-4Lnx}$$

$$= e^{Lnx^{-4}}$$

$$= x^{-4}$$

La ecuación obtenida en el paso 1 se multiplica por el factor integrante

$$x^{-4}y = \int x^{-4}.x^{5}e^{x}\,dx$$

$$x^{-4}y = \int x^{-4}.x^{5}e^{x}\,dx$$

$$x^{-4}y = \int .xe^{x}\,dx$$

Aplicando la integración por partes, se obtiene:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int udv = xe^{x} - e^{x} + c$$

$$yx^{-4} = xe^{x} - e^{x} + c$$

$$y = \frac{xe^{x} - e^{x} + c}{x^{-4}}$$

$$y = x^{5}e^{x} - x^{4}e^{x} + cx^{4}$$

b. Ejemplo ilustrativo n°2

Resolver la ecuación $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$

Solución: Como la ED está de forma estándar se procede a aplicar el paso 2

$$\frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\int -3dx}$$

$$= e^{-3x}$$

Luego se multiplica a y se iguala a la integral del factor integrante por f(x)

$$e^{-3x}y = \int 0.e^{-3x}dx$$

$$e^{-3x}y = \int 0.dx$$

$$e^{-3x}y = c$$

$$y = ce^{3x}$$

c. Ejemplo ilustrativo n°3

Resolver la ecuación $x\frac{dy}{dx} + y = 2x$ con

y(1) = 0

Solución: Como la ED no está de forma estándar se procede a dividirla para x

$$x\frac{dy}{dx}+y=2x$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=\frac{2x}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=2$$

Como ya está de forma estándar, se identifica a p(x) y f(x), para hallar el factor integrante.

$$e^{\int p(x)dx}=e^{\int \frac{1}{x}dx}$$

$$e^{\int p(x)dx}=e^{Lnx}$$

$e^{\int p(x)dx}=x$ por propiedades de los logaritmos $e^{Lnx}=x$

Luego multiplicamos por el factor integrante a y e igualamos a la integral de f(x) por el factor integrante:

$$xy=\int 2xdx$$

$$xy=2\frac{x^2}{2}+c$$

$$xy=x^2+c$$

$$y=\frac{x^2}{x}+\frac{c}{x}$$

$$y=x+cx^{-1}$$

Ahora como y(1) = 0, sustituyendo:

$$y=x+cx^{-1}$$

$$0 = 1 + c1^{-1}$$

$-1 = c$ por lo tanto, nuestra ecuación queda así: $y = x - x^{-1}$

d. Ejemplo ilustrativo n°4

Resolver la ecuación $(x^2 + 9)\frac{dy}{dx} + xy = 0$

Solución: primero transformamos la ecuación dada a una forma estándar.

$$(x^2 + 9)\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{x^2 + 9}y = \frac{0}{x^2 + 9}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{x^2 + 9}y = 0$$

Luego nuestro $p(x) = \frac{x}{x^2+9} \wedge f(x) = 0$

Ahora: $e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{x}{x^2+9}dx}$

$$= e^{\int \frac{x}{x^2+9}dx}$$

haciendo un cambio de variable de $u = x^2 + 9 \Rightarrow du = 2xdx$

$$\frac{du}{2} = xdx$$

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{\frac{dx}{2}}{u}}$$

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}}$$

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\frac{1}{2}Lnu}$$

$$e^{\int p(x)dx} = e^{Lnu^{1/2}}$$

$$e^{\int p(x)dx} = u^{1/2}$$

$$e^{\int p(x)dx} = (x^2+9)^{1/2} \text{Ahora} \quad (x^2+9)^{1/2}y = \int 0.(x^2+9)^{1/2}dx$$

$$(x^2+9)^{1/2}y = c \Rightarrow y = c(x^2+9)^{-1/2}$$

5.10. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales con modelos matemáticos

- **Modelo de crecimiento de Thomas Malthus:** Uno de los primeros intentos de modelar matemáticamente el crecimiento demográfico humano lo hizo Thomas Malthus, economista inglés en 1798. En esencia, la idea del modelo malthusiano es la hipótesis de que la tasa de crecimiento de la población de un país crece en forma proporcional a la población total, P(t), de ese país en cualquier momento t. En otras palabras, mientras más personas haya en el momento t, habrá más en el futuro. En términos matemáticos, esta hipótesis se puede expresar:

$$\boldsymbol{\frac{dP}{dt} \infty P \Rightarrow \frac{dP}{dt} = kP}$$

Esto debido a que al dividir dos cantidades en proporción directa resulta una constante.

- **Modelo de decaimiento:** El núcleo de un átomo está formado por combinaciones de protones y neutrones. Muchas de esas combinaciones son inestables; esto es, los átomos se desintegran, o se convierten en átomos de otras sustancias. Se dice que estos núcleos son radiactivos; por ejemplo, con el tiempo, el radio Ra 226, intensamente radiactivo, se transforma en gas radón, Rn 222, también radiactivo. Para modelar el fenómeno de la desintegración radiactiva, se supone que la tasa con que los núcleos de una sustancia se desintegran (decaen) es proporcional a la cantidad (con más precisión, el número) de núcleos, A(t), de la sustancia que queda cuando el tiempo es t (o en el momento t):

$$\boldsymbol{\frac{dA}{dt} \infty A \Rightarrow \frac{dA}{dt} = kA}$$

Son modelos similares, con la diferencia de que en el modelo de crecimiento $k > 0$ y en el de decaimiento $k < 0$.

5.10.1. Ejemplos ilustrativos

a. Ejemplos ilustrativos

1. Un cultivo tiene una cantidad inicial N_0 de bacterias. Cuando t = 1 h, la cantidad medida de bacterias es $\frac{3}{2}N_0$. Si la razón de reproducción es proporcional a la cantidad de bacterias presentes, calcule el tiempo necesario para triplicar la cantidad inicial de los microorganismos.

$$\frac{dN}{dt} = kN \Rightarrow \frac{dN}{dt} - kN = 0$$

Entonces: P(t) = -k

$$e^{\int -kdt} = e^{-kt}$$

$$e^{-kt}N=\int 0e^{-kt}dt$$
$$e^{-kt}N=C$$
$$N=\frac{C}{e^{-kt}}$$

Ahora hacemos uso de las condiciones dadas

$$N(t)=Ce^{kt}$$
$$N(0)=N_0$$

Entonces: $N(t)=N_0e^{kt}$

$$N_0=Ce^{k(0)}$$
$$N_0=C$$
$$N(1)=\frac{3}{2}N_0$$
$$\frac{3}{2}N_0=N_0e^{1k}\Rightarrow\frac{3}{2}=e^{k}$$

Aplicamos Ln a ambos lados

$$Ln\left(\frac{3}{2}\right)=Lne^{k}\Rightarrow kLne=Ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$N(t)=N_0e^{0,4055t}$$

$$k=0,4055$$

Ahora utilizamos la otra condición

$$N(t)=3N_0$$

Ahora sustituyendo en el modelo

$$3N_0 = N_0 e^{0,4055t} \Longrightarrow 3 = e^{0,4055t}$$

$$Ln3 = Lne^{0,4055t} \Longrightarrow 0,4055t = Ln3$$

$$t = \frac{Ln3}{0,4055} \approx 2,71h$$

- Un reactor de cría convierte al uranio 238, relativamente estable, en plutonio 239, un isótopo radiactivo. Al cabo de 15 años, se ha desintegrado el 0.043% de la cantidad inicial, A_0, de una muestra de plutonio. Calcule el periodo medio de ese isótopo, si la razón de desintegración es proporcional a la cantidad presente.

Solución

$$\frac{dA}{dt} = kA \Rightarrow \frac{dA}{dt} - kA = 0$$

Por tanto: $e^{\int -kdt} = e^{-kt}$

Entonces: P(t) = -k

Ahora: Con $A(0) = A_0$

$$e^{-kt}A = \int 0e^{-kt}dt$$

$$e^{-kt}A = C$$

$$A(t) = \frac{C}{e^{-kt}}$$

$$A(t) = Ce^{kt}$$

$$A(15) = A_0 e^{15k}$$

$\frac{99,957}{100} A_0 = A_0 e^{15k}$

Ahora el periodo medio es cuando se ha desintegrado el 50%

$$\frac{99,957}{100} = e^{15k} \Rightarrow 15k = Ln\left(\frac{99,957}{100}\right)$$

$$k = \frac{Ln\left(\frac{99,957}{100}\right)}{15} = -0,000029$$

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{-0,000029t}$$

$$t = 24,180 \text{ años}$$

$$A(t) = A_0 e^{-0,000029t}$$

- La población de bacterias en un cultivo crece a una razón proporcional a la cantidad de bacterias presentes al tiempo *t*. Después de tres horas se observa que hay 400 bacterias presentes. Después de 10 horas hay 2 000 bacterias presentes. ¿Cuál era la cantidad inicial de bacterias?

Datos:
N(0)=N0
N(3)=400
N(10)=2000
N(0)=?

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

$$\frac{dN}{N} = kdt$$

$$\frac{dN}{N} = k\,dt$$
$$Ln\,N = kt + c$$
$$N = e^{kt+c}$$
$$N(t) = ce^{kt}$$

$\Rightarrow$

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$
$$400 = N_0 e^{3k}$$
$$\frac{400}{N_0} = e^{3k}$$

$\Rightarrow$

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$
$$2000 = N_0 e^{10k}$$
$$\frac{2000}{N_0} = e^{10k}$$
$$\frac{2000}{N_0} = e^{7k} e^{3k}$$

Ahora sustituyendo

$$N(t)=N_0e^{kt}$$

$$\frac{\cancel{2000}}{\cancel{N_0}}=e^{7k}\frac{\cancel{400}}{N_0} \longrightarrow$$

$$\frac{400}{e^{3(0,2299)}}=N_0$$

$$N_0=200,6906$$

- Cuando t = 0, había 100 miligramos de una sustancia radiactiva. Al cabo de 6 horas, esa cantidad disminuyó el 3%. Si la razón de desintegración, en cualquier momento, es proporcional a la cantidad de la sustancia presente, calcule la cantidad que queda después de 2 horas.

Solución

$$\frac{dA}{dt}=kA \Rightarrow \frac{dA}{dt}-kA=0$$

$$A(t)=ce^{kt}$$

A(0) =100mg
A(6) = 97%(100)
=97
A(2) =?

Sustituyendo

$$100=ce^{k(0)}$$
$$c=100$$

Cambiando c

$$A(t)=100e^{kt}$$

Ahora

$$97=100e^{k(6)}$$

Aplicando Ln

$$Ln\frac{97}{100}=Lne^{k(6)}$$

$$6k=Ln\frac{97}{100}$$

$$k=\frac{Ln\frac{97}{100}}{6}$$

$$k=-0,0051$$

$$A(t)=100e^{-0,0051t}$$

Ahora A(2) =?

$$A(t)=100e^{-0,0051(2)}$$
$$A(t)=98,98mg$$

5.11. Ley de enfriamiento de newton

Ley de Newton del enfriamiento Según la ley empírica de Newton acerca del enfriamiento, la rapidez con que se enfría un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que le rodea, que es la temperatura ambiente. Si T(t) representa la temperatura del objeto en el momento *t, Tm* es la temperatura constante del medio que lo rodea y dT/dt es la rapidez con que se enfría el objeto, la ley de Newton del enfriamiento se traduce en el enunciado matemático:

$$\frac{dT}{dt} \infty T - Tm \Rightarrow \frac{dT}{dt} = k(T - Tm)$$

a. Al sacar un pastel del horno, su temperatura es 300°F. Después de 3 minutos, 2OO °F. ¿En cuánto tiempo se enfriará hasta la temperatura ambiente de 70 °F?

Solución

Datos:
t=3min
T(3m)= 200°F
T(t)=70°F

$$T_0 = 300F$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

$$\frac{dT}{dt} - k(T - T_m) = 0$$

$$P(t) = -k$$

$$e^{\int -kdt} = e^{-kt}$$

$$e^{-kt}(T - T_m) = \int 0 dt$$

$$e^{-kt}(T - T_m) = c$$

$$T - T_m = \frac{c}{e^{-kt}}$$

$$T - T_m = ce^{kt}$$

$$T = ce^{kt} + T_m$$

Condiciones

$$T(0) = 300$$

$$T_m = 70$$

$$300 = ce^{k(0)} + 70$$

$$300 - 70 = c$$

$$c = 230$$

Sustituyendo c

$$T = 230e^{kt} + 70$$

$$T(3) = 200$$

$$200 = 230e^{3k} + 70$$

$$\frac{200-70}{230}=e^{3k}$$
$$e^{3k}=\frac{200-70}{230}$$
$$Lne^{3k}=Ln\left(\frac{200-70}{230}\right)$$

Ahora:

$$3k = Ln\left(\frac{200-70}{230}\right)$$

$$k = \frac{Ln\left(\frac{200-70}{230}\right)}{3}$$
$$k = -0{,}1902$$

Sustituyendo

$$T=230e^{-0.1902t}+70$$
$$T(t)=70{,}001$$

$$70{,}001=230e^{-0.1902t}+70$$
$$t=Ln\left(\frac{70{,}001-70}{230}\right)\Big/-0{,}1902$$
$$t=64{,}9\min$$

b. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial era de 20° C, se deja caer en un gran tanque de agua hirviendo. ¿Cuánto tiempo tardará la barra en alcanzar los 90° C si se sabe que su temperatura aumentó 2° en 1 segundo? ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar los 98° C?

Solución

Datos:
T0=20°c
Tm=100°c
T(1)=22°C
T(t)=90°c
T(t)=98°c

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

$$\frac{dT}{(T - T_m)} = k\,dt$$

$$\int \frac{dT}{(T - T_m)} = \int k\,dt$$

$$\int \frac{dT}{(T - T_m)} = \int k\,dt$$

$$Ln(T - T_m) = kt + c$$

$$Ln(T - T_m) = kt + c$$

$$T - T_m = e^{kt+c}$$

$$T = e^{kt+c} + T_m$$

$$T(t) = ce^{kt} + T_m$$

Evaluando

$$T(0) = ce^{k(0)} + 100$$

$$20 = ce^{k(0)} + 100$$

$$c = -80$$

$$T(t) = -80e^{k(0)} + 100$$

$$22 = -80e^{k} + 100$$

$$22 - 100 = -80e^{k}$$

$$\frac{22 - 100}{-80} = e^{k}$$

$$Ln\left(\frac{22 - 100}{-80}\right) = k$$

$$k = -0,0253$$

c. Un termómetro se lleva de un recinto interior hasta el ambiente exterior, donde la temperatura del aire es 5°F. Después de un minuto, el termómetro indica 55°F, y después de cinco marcas 30°F. ¿Cuál era la temperatura del recinto interior?

Solución

Datos:
Tm=5°F
T(1)=55°F
T(5)=30°F
T0=?

$$T = ce^{kt} + T_m$$

$$T = ce^{kt} + 5$$

$$T = ce^{kt} + 5$$

$$55 = ce^{k} + 5$$

$$55 - 5 = ce^{k}$$

$$\frac{50}{c} = e^{k}$$

Para T = 55°F

$$T = ce^{kt} + 5$$

$$55 = ce^{k} + 5$$

$$55 - 5 = ce^{k}$$

$$\frac{50}{c} = e^{k}$$

Ahora para T= 30°F

$$T = ce^{kt} + 5$$

$$30 = ce^{5k} + 5$$

$$30 - 5 = ce^{5k}$$

$$\frac{25}{c} = e^{5k}$$

$$\frac{25}{c} = e^{4k+k}$$

$$\frac{25}{c} = e^{4k}e^{k}$$

$$\frac{25}{c} = e^{4k}\frac{50}{c}$$

$$\frac{25}{c} = e^{4k}\frac{50}{c}$$

$$\frac{25}{c}.\frac{c}{50} = e^{4k}$$

$$\frac{1}{2} = e^{4k} \Rightarrow 4k = Ln\frac{1}{2}$$

$$k = -0{,}1732$$

$$\frac{50}{c} = e^{k}$$

$$\frac{50}{e^{-0{,}1732}} = c$$

$$c = 59{,}46$$

$$T = ce^{kt} + 5$$

$$T = 59{,}46e^{-0{,}1732t} + 5$$

$$T(0) = 59{,}46e^{-0{,}1732(0)} + 5$$
$$T(0) = 59{,}46 + 5$$

T (0) = 64,46°F

BIBLIOGRAFÍA

Ayres, Frank Y Elliot Mendelson. Cálculo. Editorial Mc Graw Hill.

Dennis Zill. C. Cálculo con Geometría Analítica. Editorial Harla.

Elbridge P. Vance An Introduction To Modern Mathematics Fondo Educativo

Interamericano S. A. EEUU 1968.

Louis Leithold, El Cálculo con Geometría Analítica, Editorial Harla, México 1986.

Michael Spivak. Calculus (Cálculo Infinitesimal) Tomos I y II Editorial Reverté España 1970.

N Piskunov, Cálculo Diferencial e Integral Editorial Limusa, México 2001

Purcell, Edwin y VARBERG, Dale. Cálculo con Geometría Analítica. Editorial Prentice Hall.

Robert T. Smith y Roland B. Minton Cálculo Volumen I Mc Graw Hill, España 2002.

Rolan E. Larson Cálculo y Geometría Analítica, Mc Graw Hill, México 1999.

Saturnino L Salas y Einar Hile Calculus de una y varias variables con Geometría Analitica Editorial Reverté S. A. España 1977.

Swokowski, Eral. W. Cálculo Con Geometría Analítica Editorial Iberoamericana.

Thomas / Finney, Cálculo de una variable, Paerson Educación, México 1998.

William Anthony Granville, Cálculo Diferencial e Integral Editorial Uteha, México 1952.

Cálculo integral aplicado a la agroindustria para el aprendizaje práctico,

se publicó en el mes de abril de 2026.

ISBN:

Grupo Editorial BLR
Ecuador
Cel: +593 98 320 4362
https://grupoblr.com/
publicaciones@grupoblr.com

BIOGRAFÍA DE LOS AUTORES

Lcdo. Alexander Álvarez Martínez, Mgtr.

Alexander Enrique Álvarez Martínez, Mgtr., es Licenciado en Educación, mención Matemática y Física, con Maestría en Gerencia Educativa. Posee más de 31 años de experiencia en bachillerato y educación superior. Es especialista en el área numérica, académico e investigador, Docente de la Universidad Agraria del Ecuador de grado y Docente de posgrado de la Universidad de Especialidades Espíritu Santo, desarrollo curricular, proyectos educativos e innovación pedagógica, además de producción científica.

Ing. Julio Palmay Paredes, MSc.

Ingeniero Agroindustrial por la Universidad Nacional de Chimborazo, con maestría en Calidad de Alimentos de Origen Animal (UAB) y doctorando en Ciencia de los Alimentos (UNALM). Investigador en PROANIM, especializado en tecnologías emergentes y producción animal. Docente de la Universidad Agraria del Ecuador e Instituto tecnológico Superior "Superarse", fundador de Fundación "Rescata", autor científico y conferencista internacional

Ing. Ana María Arellano Arcentales, Mgtr.

Ingeniera en Sistemas Computacionales por la Universidad de Guayaquil, con maestrías en Docencia y Gerencia en Educación Superior y en Diseño y Gestión de Proyectos Tecnológicos (UNIR). Cuenta con experiencia en proyectos tecnológicos del sector bancario y en evaluación de instituciones de educación superior. Docente de la Agraria del Ecuador y Universidad Tecnológica ECOTEC ámbito tecnológico y académico.

Eco. Alex Ibarra Velásquez, Mgtr.

Economista Agrícola por la Universidad Agraria del Ecuador, máster en Comercio Internacional y Marketing de la ESPOL; candidato a doctorando en Proyectos (UIIX). Ex Subsecretario de Comercialización Agropecuaria del MAG. 26 años de experiencia en docencia universitaria en la Universidad Agraria del Ecuador, autor de 20 artículos científicos y 2 libros, con una obra adicional en proceso

Ing. Raquel Gómez Chabla, Mgtr.

Ingeniera en Sistemas Computacionales por la Universidad Católica de Santiago de Guayaquil, con maestrías en Gestión de la Productividad y Calidad (ESPOL) y en Dirección y Gestión de TI (UNIR). Investigadora en transformación digital, con experiencia en IoT y computación en la nube aplicada a sectores agrícola, acuícola y educativo. Docente de la Universidad Agraria del Ecuador, autora científica y conferencista.

CÁLCULO INTEGRAL APLICADO A LA AGROINDUSTRIA PARA EL APRENDIZAJE PRÁCTICO

Estimado lector, el aprendizaje del Cálculo Integral es importante debido a que propicia el pensamiento lógico-analítico y se utiliza como herramienta para resolver problemas reales y concretos de diversas áreas del conocimiento, no sólo en Matemáticas y Física, sino en disciplinas tales como la Ingeniería, Economía, entre otras. La aplicación de los teoremas esenciales propicia en las personas que estudian o practican los métodos del cálculo integral una evolución en sus capacidades de abstracción y razonamiento que conlleva a una madurez matemática, necesarios para operar y aplicar funciones matemáticas con variable real en el planteamiento y solución de situaciones prácticas que llegan a presentarse en su ejercicio profesional. La integración se considera un eje fundamental para el planteamiento y desarrollo de conceptos que permiten entender y asimilar conocimientos.

Agradecemos a todos los lectores que se acercan a esta obra con ánimo de aprender, aplicar y transformar.

GRUPO BLR

Grupo Editorial BLR
Ecuador
Cel: +593 98 320 4362
https://grupoblr.com/
publicaciones@grupoblr.com

ISBN: 978-9942-51-520-9
9 789942 515209