GRUPO BLR

ANÁLISIS MATEMÁTICO EN LA ERA DIGITAL:

MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN, CON APLICACIONES EN TI Y PRÁCTICAS EN GOOGLE COLAB

ISBN: 978-9907-852-07-3

Maritza Alexandra Pinta

2026

ANÁLISIS MATEMÁTICO EN LA ERA DIGITAL: MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN, CON APLICACIONES EN TI Y PRÁCTICAS EN GOOGLE COLAB

Maritza Alexandra Pinta

AUTOR



UTMACH

Este libro ha sido debidamente examinado y valorado en la modalidad doble par ciego con fin de garantizar la calidad científica.

©Grupo Editorial BLR
Universidad Técnica de Machala
Riobamba – Ecuador
Correo: publicaciones@grupoblr.com
https://grupoblr.com/libros-investigo
REPOSITORIO



Pinta, M. (2026) Análisis matemático en la era digital: Máximos y mínimos de una función, con aplicaciones en TI y prácticas en Google Colab. Grupo Editorial BLR.

© Maritza Alexandra Pinta

Análisis matemático en la era digital:
Máximos y mínimos de una función, con
aplicaciones en TI y prácticas en Google Colab.

ISBN: 978-9907-852-07-3

El copyright promueve la libertad de expresión, protege la diversidad de ideas y conocimiento, además apoya la libre expresión. Se prohíbe de manera rigurosa la producción o el almacenamiento de esta publicación, ya sea en su totalidad o en parte, está estrictamente prohibido por ley, incluyendo el diseño de la portada, así como su difusión a través de cualquiera de sus medios, ya sean electrónicos, mecánicos, ópticos, de grabación o incluso de fotocopia, sin permiso de los propietarios de los derechos de autor.

FILIACIÓN DEL AUTOR

Maritza Alexandra Pinta

Universidad Técnica de Machala

Correo Electrónico: mpinta@utmachala.edu.ec

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5697-0474

PREFACIO

El Análisis Matemático es una de las asignaturas fundamentales en la formación de los profesionales de las Tecnologías de la Información (TI). Más allá de su carácter teórico, esta disciplina proporciona herramientas esenciales para comprender, modelar y optimizar diversos procesos que sustentan los sistemas computacionales modernos. En la era digital, conceptos como eficiencia, rendimiento, optimización de recursos y toma de decisiones basada en datos están estrechamente vinculados con el estudio riguroso del comportamiento de las funciones matemáticas.

El presente libro es una continuación de la obra "Análisis Matemático en la era digital: derivación de funciones en una variable, con aplicaciones en TI y prácticas en Google Colab". En esta ocasión, está dirigido a estudiantes de segundo semestre de la carrera de Tecnologías de la Información que ya poseen conocimientos básicos sobre la derivada y las principales reglas de derivación de funciones algebraicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, así como su aplicación en la resolución de problemas del ámbito informático mediante el uso de herramientas computacionales.

En esta obra se abordan los máximos y mínimos de funciones reales de una variable, con el objetivo de que el estudiante comprenda los métodos de optimización basados en derivadas, identifique, analice y resuelva problemas de optimización, interpretando de manera crítica los resultados obtenidos en el ámbito de las tecnologías de la información.

En este contexto se consideran aplicaciones que incluyen la optimización de recursos, el análisis del rendimiento de sistemas, el ajuste de modelos, el manejo de datos y la toma de decisiones basadas en ellos.

Además, se propicia la integración entre teoría matemática y herramientas tecnológicas como Google Colab y el lenguaje de programación Python. Lo cual permite el desarrollo de un aprendizaje activo, contextualizado y orientado a la resolución de problemas reales en el ámbito de las Tecnologías de la Información.

A través de esta obra se desea contribuir al desarrollo del conocimiento matemático del estudiante y de su capacidad para razonar, analizar y aplicar herramientas digitales acordes al desarrollo tecnológico actual. De esta manera, se busca integrar el razonamiento matemático con la experimentación computacional en el proceso formativo del estudiante de Tecnologías de la información.

ÍNDICE

PREFACIO ..... **i**

ÍNDICE ..... **iii**

ÍNDICE DE TABLAS ..... **ix**

ÍNDICE DE FIGURAS ..... **xi**

CAPÍTULO I **14**

1 COMPORTAMIENTO DE FUNCIONES **14**

1.1 Introducción 14

1.2 La derivada como herramienta del análisis de funciones 16

1.3 Crecimiento y decrecimiento de una función 18

1.4 Intervalos de variación y análisis del estudio del signo de la derivada 20

1.5 Segunda derivada 22

1.6 Concavidad de una función 23

1.6.1 Concavidad hacia arriba (función convexa) 23

1.6.2 Concavidad hacia abajo 24

1.7 Punto de inflexión 26

1.8 Interpretación gráfica y analítica avanzada 27

1.8.1 Ejemplo 1 28

1.8.2 Análisis grafico del comportamiento de F(x) 29

1.8.3 Análisis analítico del comportamiento de F(x) y su interpretación en el contexto de la ciberseguridad 30

1.9 Piensa y analiza 33

1.10 Preguntas para reflexionar y analizar 34

1.11 Autoevalúate 36

CAPÍTULO II 40

2 MÁXIMOS Y MÍNIMOS 40

2.1 Introducción 40

2.2 Máximos y mínimos locales 41

2.3 Máximos y mínimos absolutos 43

2.4 Teorema del Valor Extremo 44

2.5 Punto crítico y estacionario 44

2.6 Criterio de la primera derivada 47

2.6.1 Ejemplo 2 51

2.7 Criterio de la segunda derivada 55

2.7.1 Ejemplo 3 58

2.8 Método combinado de clasificación de puntos críticos 60

2.8.1 Ejemplo 4 62

2.8.2 Ejemplo 5 66

2.9 Piensa y analiza 69

2.10 Preguntas para reflexionar y analizar: 70

2.11 Autoevalúate 71

CAPÍTULO III 75

3 ANÁLISIS Y CONSTRUCCIÓN AVANZADA DE GRÁFICAS MEDIANTE MÁXIMOS Y MÍNIMOS 75

3.1 Introducción 75

3.2 Utilidad de la representación gráfica de funciones en Tecnologías de la Información 76

3.2.1 Análisis del comportamiento del sistema 78

3.2.2 Detección de cambios estructurales 79

3.2.3 Optimización y toma de decisiones 79

3.2.4 Validación de modelos computacionales 79

3.2.5 Relación con el análisis de datos 80

3.3 Procedimiento sistemático para construir una gráfica 81

3.4 Uso de Google Colab para la graficación de funciones 86

3.4.1 Ejemplo 6 88

3.4.2 Ejemplo 7 96

3.4.3 Ejemplo 8 104

3.5 Piensa y analiza 111

Escenario: 111

3.6 Autoevalúate 113

CAPÍTULO IV 116

4 OPTIMIZACIÓN EN TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN MEDIANTE EXPERIMENTACIÓN EN GOOGLE COLAB 116

4.1 Introducción 116

4.2 Del Problema Tecnológico al Modelo Matemático..... 118

4.2.1 Problema tecnológico..... 118

4.2.2 Modelo matemático..... 119

4.2.3 Proceso de transición del problema tecnológico al modelo matemático..... 120

4.3 Tipos de funciones utilizadas en el modelado de sistemas informáticos..... 124

4.4 Optimización usando Google Colab 125

4.5 Pasos para resolver problemas mediante técnicas de optimización basadas en el estudio de máximos y mínimos, implementadas en Google Colab 127

4.5.1 Ejemplo 9: Optimización del Rendimiento de Servidores..... 129

4.5.2 Ejemplo 10: Optimización de Algoritmos y Procesamiento de Datos 135

4.5.3 Ejemplo 11: Optimización en Redes y Tráfico de Datos 141

4.5.4 Ejemplo 12: Optimización en Ciberseguridad 144

4.5.5 Ejemplo 13: Optimización de Eficiencia Energética en Infraestructura TI 148

4.6 Piensa y analiza 152

4.7 Autoevalúate 153

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 157

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Interpretación geométrica del signo de la derivada...... 21

Tabla 2. Análisis del signo de la derivada. 31

Tabla 3. Análisis del signo de la segunda derivada 32

Tabla 4. Análisis aplicando criterio de la primera derivada...... 50

Tabla 5. Análisis aplicando criterio de la primera derivada, ejemplo 2. 53

Tabla 6. Análisis aplicando criterio de la segunda derivada...... 57

Tabla 7. Análisis aplicando criterio de la segunda derivada, ejemplo 3. 59

Tabla 8. Análisis aplicando criterio de la segunda derivada, ejemplo 4. 64

Tabla 9. Análisis aplicando criterio de la primera derivada, ejemplo 4. 64

Tabla 10. Análisis aplicando criterio de la segunda derivada, ejemplo 5...... 68

Tabla 11. Tabla de comportamiento. 85

Tabla 12. Tabla de comportamiento de ejemplo 6. 91

Tabla 13. Detalle de codificación de ejemplo 6...... 94

Tabla 14. Tabla de comportamiento de ejemplo 7. 99

Tabla 15. Tabla de comportamiento de ejemplo 8. 108

Tabla 16. Tipos de funciones utilizadas en modelado en sistemas TI. 124

Tabla 17. Detalle de codificación de ejemplo 9...... 134

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Ciclo de análisis de comportamiento de funciones..... 15

Figura 2. La derivada como herramienta de análisis de funciones. 16

Figura 3. Función creciente en todo el intervalo...... 18

Figura 4. Función decreciente en todo el intervalo...... 19

Figura 5. Relación entre la derivada y el comportamiento de una función. 22

Figura 6. Concavidad de la función $f(x) = x^2$. 24

Figura 7. Concavidad de la función $f(x) = -x^2$. 25

Figura 8. Función con cambio de concavidad y punto de inflexión. 26

Figura 9. Gráfica de la función $0.04x^3 - 0.72x^2 + 3.2x + 10$ 29

Figura 10. Extremos locales y absolutos en intervalo cerrado. 43

Figura 11. Punto crítico con derivada cero (estacionario), donde la tangente es horizontal...... 46

Figura 12. Punto crítico (no estacionario) donde no existe la derivada. 46

Figura 13. Gráfica de función $x^4 - 4x^3 + 4x^2$. 54

Figura 14. Gráfica de función x^5-5x^4. 65

Figura 15. Gráfica de función xe^{-x} 69

Figura 16. Utilidad de la gráfica de funciones 78

Figura 17. Algoritmo para construir la gráfica de una función. ... 81

Figura 18. Ejemplo de graficación básica en Google Colab. 88

Figura 19. Gráfica manual de ejemplo 6. 93

Figura 20. Codificación de ejemplo 6. 94

Figura 21. Grafica en Google Colab de función de ejercicio 6. 96

Figura 22. Gráfica manual de ejemplo 7. 102

Figura 23. Codificación de ejemplo 7. 103

Figura 24. Grafica en Google Colab de función de ejemplo 7. 104

Figura 25. Gráfica manual de ejemplo 7. 109

Figura 26. Codificación de ejemplo 8. 110

Figura 27. Grafica en Google Colab de función de ejemplo 8. 111

Figura 28. Proceso de transición del problema tecnológico al modelo matemático. 120

Figura 29. Procesamiento de solicitudes en un servidor web. 130

Figura 30. Codificación para ejemplo 9 en Google Colab. 133

Figura 31. Gráfica de ejercicio 9. 135

Figura 32. Algoritmos de procesamiento de datos. 136

Figura 33. Codificación para ejemplo 10 en Google Colab. 139

Figura 34. Gráfica de ejercicio 10. 140

Figura 35. Redes y Tráfico de Datos. 141

Figura 36. Codificación para ejemplo 11 en Google Colab. 144

Figura 37. sistema de detección de intrusos (IDS). 145

Figura 38. Codificación para ejemplo 12 en Google Colab. 148

Figura 39. Consumo energético en infraestructura tecnológica. 149

Figura 40. Codificación para ejemplo 13 en Google Colab. 152

CAPÍTULO I

1 COMPORTAMIENTO DE FUNCIONES

1.1 Introducción

El estudio de los máximos y mínimos de una función no puede abordarse de manera aislada sin una comprensión previa y profunda del comportamiento global de dicha función. Para ello, primero se debe determinar, de manera gráfica y analítica, la variación de la función a lo largo de su dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y el comportamiento de su curvatura.

En el presente capítulo se reconsideran conceptos básicos sobre la derivada, la cual es fundamental para el análisis del comportamiento de las funciones. En base a la primera derivada se analizan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función. La segunda derivada permite analizar la concavidad y convexidad de una curva y determinar los puntos donde la función cambia significativamente su comportamiento. Estos análisis constituyen la base matemática necesaria para comprender los procesos de optimización que se desarrollarán en los capítulos posteriores.

En el ambito de tecnologías de la información, donde actualmente los datos y los modelos matemáticos guían la toma de decisiones, el análisis del comportamiento de una función que incluye la lectura crítica de gráficas y la interpretación del significado matemático de sus características, son competencias fundamentales para un profesional en

tecnologias. En la Figura 1, se ha esquematizado el ciclo del análisis del comportamiento de funciones, partiendo de un análisis global, la aplicación de la primera y segunda derivada, la identificacion de puntos de cambio, su aplicaciones en TI y la integracion de herramientas digitales.



Figura 1. Ciclo de análisis de comportamiento de funciones

***Fuente**: Elaboración propia.*

Además, en este capítulo el razonamiento analítico se complementa con visualización computacional, introduciendo al estudiante en el uso de Google Colab para representar funciones, analizar dinamicamente su comportamiento y comparar resultados teóricos con simulaciones numéricas y gráficas. De esta manera, se propicia un aprendizaje activo

que combina el rigor del Análisis Matemático con el uso de herramientas digitales actuales.

Al finalizar este capítulo, el estudiante podrá resolver con mayor seguridad y criterio problemas de optimización, comprendiendo la utilidad del cálculo de los máximos y mínimos de una función en el contexto de las tecnologías de la Información.

1.2 La derivada como herramienta del análisis de funciones



Figura 2. La derivada como herramienta de análisis de funciones.

Fuente: Elaboración propia.

La Figura 2 esquematiza el hecho de que la derivada constituye uno de los ejes fundamentales del Análisis Matemático, al ser una herramienta útil para el análisis del comportamiento de las funciones reales de una variable. En este sentido, la derivada permite describir y analizar el comportamiento de una función sin depender de su representación gráfica (Hass et al., 2022; Stewart et al., 2021).

Según su definición geométrica, la derivada de una función $f(x)$, denotada por $f'(x)$, representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto determinado (Stewart et al., 2021). Mientras que, analíticamente la derivada expresa la tasa de cambio instantánea de la variable dependiente con respecto a la variable independiente (Larson & Edwards, 2021). De esta manera, la derivada relaciona la expresión algebraica de una función con su comportamiento gráfico, convirtiéndose en una herramienta fundamental en el análisis de las funciones.

En el campo de las tecnologías de la información, muchos procesos computacionales pueden modelarse mediante funciones matemáticas que describen, por ejemplo, el consumo de recursos, el tiempo de ejecución de algoritmos o la eficiencia de un sistema. En estos casos, la derivada permite identificar regiones de consumo acelerado de recursos, minimizar tiempo de ejecución de algoritmos y optimizar condiciones de operación de un sistema, indicadores claves a considerar en la toma de decisiones técnicas y administrativas (Grus, 2019).

En entornos digitales, como los sistemas de visualización de datos, videojuegos y simulación, la derivada permite interpretar adecuadamente las gráficas obtenidas mediante herramientas computacionales, comprender el significado matemático de las pendientes y sus cambios. Lo cual es esencial para interpretar correctamente los resultados computacionales obtenidos (VanderPlas, 2023).

En esta era de grandes transformaciones tecnológicas, plataformas gratuitas como Google Colab permiten calcular derivadas de manera simbólica y numérica, representar gráficamente funciones y validar resultados teóricos mediante simulaciones, fortaleciendo el vínculo entre el razonamiento matemático y la práctica computacional. De esta manera, el uso de la derivada trasciende del tradicional cálculo manual y se integra de manera natural con herramientas computacionales.

1.3 Crecimiento y decrecimiento de una función

Según Thomas et al. (2022) una función $f(x)$ es **creciente** en un intervalo cuando al aumentar el valor de la variable independiente x, también aumenta el valor de la variable dependiente $f(x)$. Es decir, si tomamos dos valores x_1 y x_2 dentro del intervalo, siendo $x_1 < x_2$, entonces se cumple que:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Geométricamente, esto significa que la curva de la gráfica de la función asciende de izquierda a derecha, como se ve en la Figura 3.

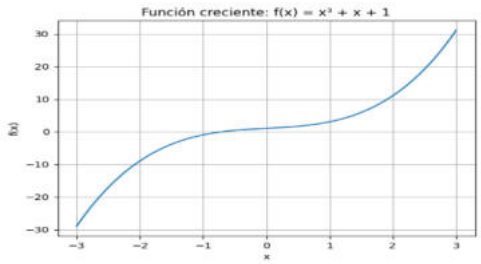


Figura 3. Función creciente en todo el intervalo.

En cambio, como se muestra en la Figura 4, una función $f(x)$ es **decreciente** en un intervalo cuando al aumentar el valor x, el valor de $f(x)$ disminuye. Es decir, $x_1 < x_2$ y se cumple que:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

En este caso, como se ve en la Figura 4, que la curva de la gráfica de la función desciende de izquierda a derecha,

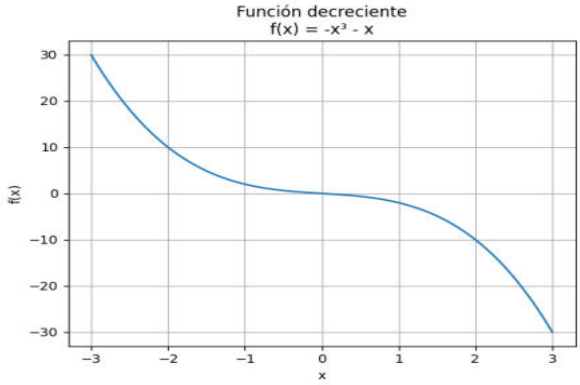


Figura 4. Función decreciente en todo el intervalo.

Fuente: Elaboración propia.

Una aplicación práctica del análisis de crecimiento y decrecimiento de una función, en el ámbito de las tecnologías de la información, se presenta al modelar el tiempo de ejecución de un algoritmo en función del tamaño de los datos de entrada. Humpherys y Jarvis (2020) utilizan el cálculo diferencial para determinar los intervalos de crecimiento de la función que representa a este modelo, lo cual les permite identificar las regiones donde el costo computacional aumenta rápidamente. Este tipo

de análisis resulta fundamental para evaluar el rendimiento de sistemas y optimizar el uso de recursos computacionales (Grus, 2019).

1.4 Intervalos de variación y análisis del estudio del signo de la derivada

El análisis del crecimiento y decrecimiento de una función constituye una de las aplicaciones más directas y relevantes de la derivada como herramienta de análisis funcional. Una vez comprendido que la derivada de una función expresa su razón de cambio instantánea y que, desde el punto de vista geométrico, corresponde a la pendiente de la recta tangente a la gráfica en un punto determinado, es posible emplear el signo de la derivada como un criterio riguroso para describir y analizar el comportamiento de la función en los distintos intervalos de su dominio. (Hass et al., 2022; Stewart et al., 2021).

Cuando una función es **creciente**, su gráfica es una curva que asciende, y las rectas tangentes trazadas en puntos de ese intervalo tienen una pendiente positiva. En términos analíticos, una pendiente positiva implica que la razón de cambio instantánea, o sea su derivada, es mayor que cero, es decir,

$$f'(x) > 0$$

Por el contrario, cuando una función es **decreciente**, su gráfica es una curva que desciende, y las rectas tangentes trazadas en puntos de ese

intervalo tienen una pendiente negativa (Larson & Edwards, 2021). En consecuencia, la razón de cambio instantánea es menor que cero, o sea:

$$f'(x) < 0.$$

Por tanto, el signo de la derivada tiene la interpretación geométrica que consta en la Tabla 1**Tabla 1**.

Tabla 1. Interpretación geométrica del signo de la derivada.

Signo de la derivada	**Tangente con inclinación**	**La función es**
Positivo	Ascendente	Creciente
Negativo	Descendente	Decreciente

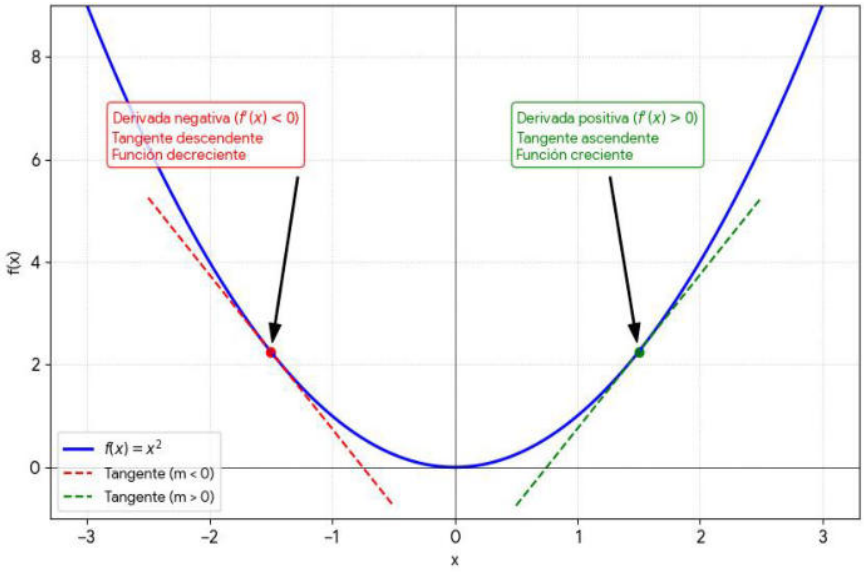


Figura 5. Relación entre la derivada y el comportamiento de una función.

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 5 se puede observar la relación entre la pendiente de la recta tangente y el comportamiento de la curva que representa a la función. Lo que permite analizar el crecimiento y decrecimiento de la función sin necesidad de determinar los puntos que la componen.

1.5 Segunda derivada

La segunda derivada complementa el análisis realizado con la primera derivada y permite interpretar de manera más precisa el comportamiento de una función. El signo de la primera derivada determina si una función es creciente o decreciente, el signo de la segunda derivada evidencia cómo varía ese crecimiento o decrecimiento, es decir, si la gráfica se curva hacia arriba o hacia abajo (Stewart et al., 2021). Este análisis es

fundamental para comprender mejor el comportamiento general de la gráfica de una función, por lo que es ampliamente utilizado en las ciencias y aplicaciones tecnológicas.

Se tiene presente que, dada una función $f(x)$ derivable, la primera derivada $f'(x)$ representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto dado. Al derivar nuevamente, se obtiene la segunda derivada $f''(x)$, que mide la variación de dicha pendiente (Larson & Edwards, 2021).

Ahora, es necesario determinar el signo de la segunda derivada para determinar si la pendiente de la recta tangente está aumentando o disminuyendo a medida que se incrementa la variable independiente (Thomas et al., 2022) . Dado que, no solo importa el sentido del cambio, sino también la manera en que ese cambio evoluciona.

1.6 Concavidad de una función

La concavidad de una función describe la forma en que se curva su gráfica en un intervalo dado. Así tenemos:

1.6.1 Concavidad hacia arriba (función convexa)

Una función es cóncava hacia arriba en un intervalo dado si su segunda derivada es positiva en todos los puntos de dicho intervalo, o sea:

$$f''(x) > 0.$$

Por tanto, las pendientes de las rectas tangentes aumentan progresivamente, tomando gráficamente una forma similar a una U abierta hacia arriba (Strang & Herman, 2022). Un ejemplo de este tipo de concavidad es la que corresponde a la gráfica de la función $f(x) = x^2$, cuya segunda derivada es siempre positiva en todo su dominio, como se puede ver en la Figura 6.

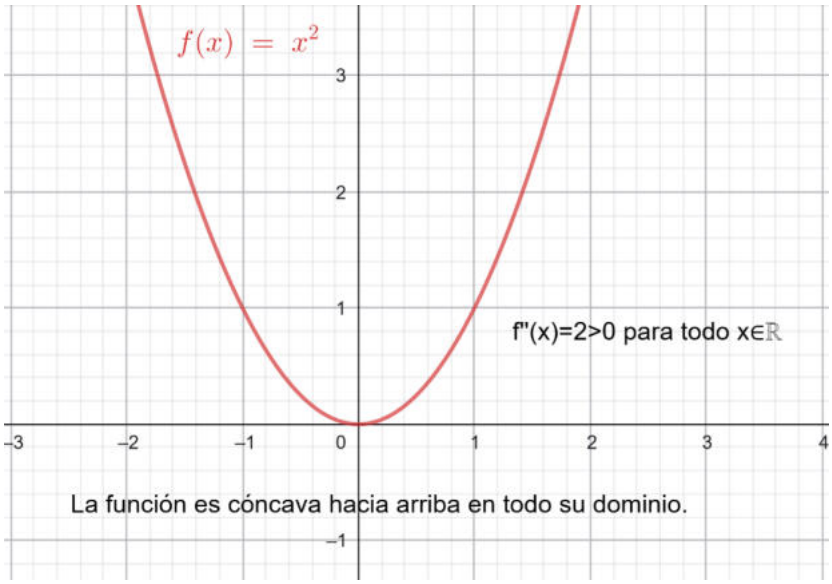


Figura 6. Concavidad de la función $f(x) = x^2$.

Fuente: Elaboración propia.

1.6.2 Concavidad hacia abajo

Una función es cóncava hacia arriba en un intervalo dado si en todos los puntos del mismo su segunda deriva es negativa, o sea:

$$f''(x) < 0.$$

En este caso, las pendientes de las rectas tangentes disminuyen a medida que aumenta x, y la gráfica adopta una forma semejante a una ∩, abierta hacia abajo (Hass et al., 2022). Un ejemplo representativo es la función $f(x) = -x^2$, como se aprecia en la Figura 7.

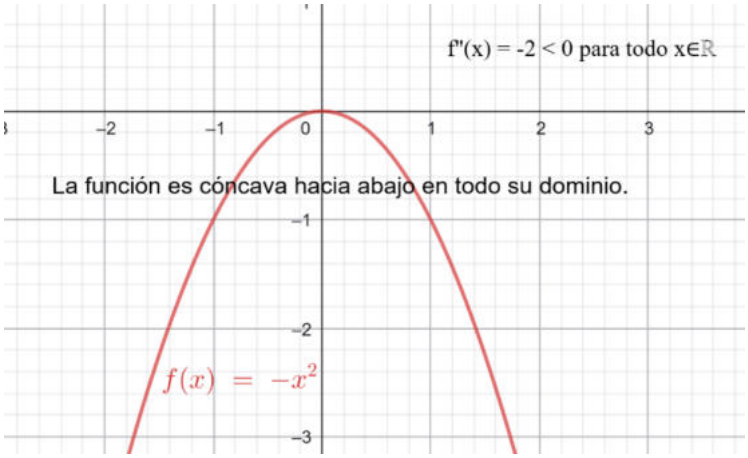


Figura 7. Concavidad de la función $f(x) = -x^2$.

Fuente: Elaboración propia.

Desde el punto de vista geométrico, la concavidad puede interpretarse observando el comportamiento de las rectas tangentes a la gráfica:

- Si al desplazarse hacia la derecha las rectas tangentes se inclinan cada vez más hacia arriba, la función es cóncava hacia arriba.
- Si las rectas tangentes se inclinan cada vez más hacia abajo, la función es cóncava hacia abajo.

1.7 Punto de inflexión

Se dice que un punto $x = c$ es un punto de inflexión de la función $f(x)$ si en torno a ese valor ocurre un cambio de concavidad de la gráfica (Larson & Edwards, 2021). La gráfica pasa de "abrirse hacia arriba" a "abrirse hacia abajo", o, al contrario (Ver Figura 8). Un punto de inflexión suele encontrarse cuando la segunda derivada se anula:

$$f''(c) = 0,$$

y además debe existir cambio de concavidad.

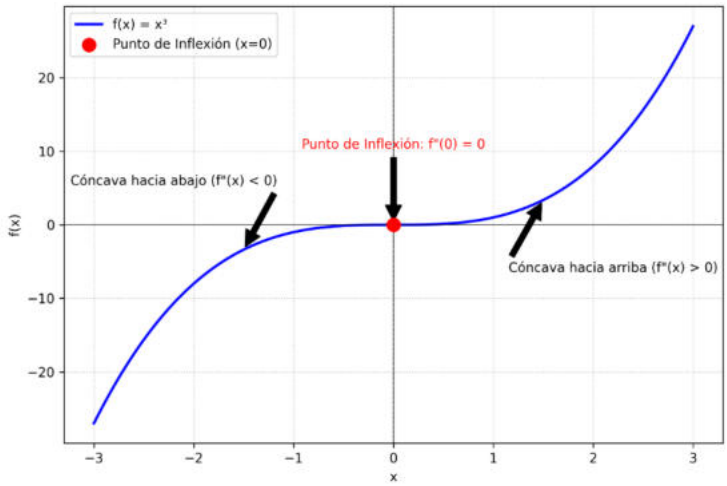


Figura 8. Función con cambio de concavidad y punto de inflexión.

Fuente: Elaboración propia.

A través del análisis del punto de inflexión de una función se puede complementar el estudio de su crecimiento, decrecimiento y concavidad, identificando cambios significativos en la dinámica del

fenómeno modelado. Este análisis prepara al estudiante para estudios posteriores de optimización y modelación.

1.8 Interpretación gráfica y analítica avanzada

La **interpretación gráfica** consiste en observar y analizar visualmente la representación gráfica de una función, para obtener información significativa como:

- Crecimiento y decrecimiento, determinado por la forma en que la curva asciende o desciende al avanzar sobre el eje horizontal.
- Concavidad, que depende de la forma de la curva: cóncava hacia arriba cuando se "abre" como una U, y cóncava hacia abajo cuando toma la forma de ∩.
- Puntos de inflexión, donde la gráfica cambia su tipo de concavidad.
- Los extremos relativos, que corresponden a los puntos más altos o más bajos de la gráfica en un entorno cercano.

La **interpretación analítica** se fundamenta en el uso de la derivada como herramienta formal para describir el comportamiento de una función. Mediante el análisis algebraico se puede establecer con rigor que:

- Si $f'(x) > 0$, la función es creciente en ese intervalo.
- Si $f'(x) < 0$, la función es decreciente.
- Si $f'(x) = 0$, el punto es candidato a un extremo relativo.
- Si $f''(x) > 0$, la función es cóncava hacia arriba.
- Si $f''(x) < 0$, la función es cóncava hacia abajo.

- Si f′(x) = 0 y existe cambio de concavidad, el punto corresponde a un punto de inflexión.

Este enfoque analítico permite justificar matemáticamente lo que se observa en la gráfica y es indispensable en la optimización de procesos informáticos, como la minimización del tiempo de respuesta de un servidor o la eficiencia de un algoritmo (Hass et al., 2022).

1.8.1 Ejemplo 1

En un sistema de detección de intrusiones (IDS), se ajusta un parámetro de sensibilidad x (escala de 0 a 12). El número estimado de alertas falsas por hora se modela con:

$$F(x) = 0.04x^3 - 0.72x^2 + 3.2x + 10, \qquad 0 \le x \le 12$$

Donde:

- x: nivel de sensibilidad del IDS,
- $F(x)$: alertas falsas por hora.

A partir del modelo dado, se procede a realizar lo siguiente:

1.8.2 Análisis grafico del comportamiento de F(x)

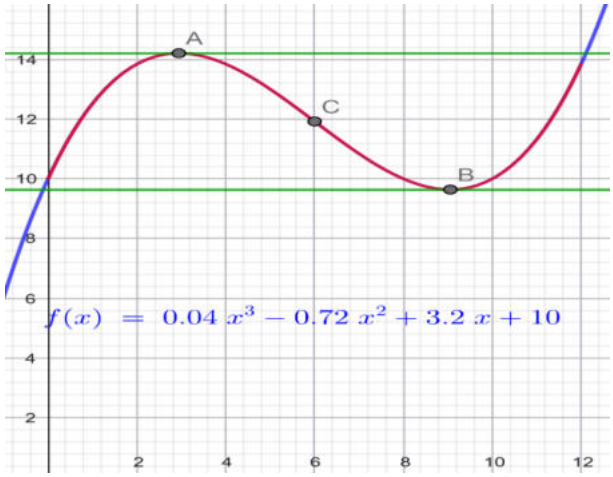


Figura 9. Gráfica de la función $0.04x^3 - 0.72x^2 + 3.2x + 10$

Fuente: Elaboración propia.

La Figura 9, representa la gráfica de F (x), donde se puede observar lo siguiente:

- La función es creciente desde $x = 0$ hasta $x \approx 3$ (punto A).
- La función es decreciente desde $x \approx 3$ hasta $x \approx 9$ (punto B).
- La función vuelve a ser creciente desde $x \approx 9$ hasta $x = 12$.
- Los puntos A y B son extremos relativos y en ellos las tangentes son horizontales.
- La curva es cóncava hacia abajo antes de $x = 6$ (punto C).
- La curva es cóncava hacia arriba después de C.
- C es un punto de inflexión.

1.8.3 Análisis analítico del comportamiento de F(x) y su interpretación en el contexto de la ciberseguridad

a) Primero, se debe calcular la derivada de *F(x)* porque ésta nos dice cómo cambia el número de alertas falsas cuando modificamos ligeramente la sensibilidad.

$$F(x) = 0.04x^3 - 0.72x^2 + 3.2x + 10$$

$$F'(x) = 0.12x^2 - 1.44x + 3.2$$

Recordemos:

- Si $F'(x) > 0$: las alertas falsas están aumentando.
- Si $F'(x) < 0$: las alertas falsas están disminuyendo.
- Si $F'(x) = 0$: el sistema cambia de comportamiento.

b) Se procede a calcular las raíces de $F'(x) = 0$, para determinar los valores exactos en que se producen estos cambios de comportamiento.

$$F'(x) = 0.12x^2 - 1.44x + 3.2$$

$$0.12x^2 - 1.44x + 3.2 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática, se obtiene: x ≈ 2.95, x ≈ 9.05

Estos valores, son semejantes a los apreciados gráficamente, en los cuales: La pendiente es cero, la gráfica tiene tangente horizontal, el comportamiento del sistema cambia.

c) Ahora, se analiza el signo de la derivada, para determinar analíticamente el comportamiento de la función antes y después de los valores encontrados. Este análisis se resume en la Tabla 2, para el intervalo dado ($0 \leq x \leq 12$).

Tabla 2. Análisis del signo de la derivada.

Intervalo	**Signo de *F'(x)***	**¿Qué ocurre?**
(0 - 2.95)	Positivo	*F(x)* es creciente
(2.95 – 9.05)	Negativo	*F(x)* es decreciente
(9.05 - 12)	Positivo	*F(x)* vuelve a ser creciente

Este análisis analítico confirma lo observado en el análisis gráfico.

En el contexto de la ciberseguridad, estos resultados se interpretan como:

- Desde sensibilidad 0 hasta aproximadamente 2.95, las alertas falsas aumentan.
- Desde aproximadamente 2.95 hasta aproximadamente 9.05, las alertas falsas disminuyen.

- Después de aproximadamente 9.05, las alertas falsas vuelven a aumentar.

d) A continuación, se encuentra la segunda derivada de *F(x)* derivando a $F'(x)$.

$$F''(x) = \frac{d}{dx}(0.12x^2 - 1.44x + 3.2)$$

$$F''(x) = 0.24x - 1.44$$

Se iguala a cero $F''(x)$, para determinar el valor de *x* correspondiente al punto de inflexión.

$$0.24x - 1.44 = 0$$
$$0.24x = 1.44$$
$$x = \frac{1.44}{0.24}$$
$$x = 6$$

e) El punto de inflexión encontrado, $x = 6$, es el punto donde el sistema cambia su patrón de respuesta.

Por ello, se debe hacer un análisis de lo que sucede antes y después de $x = 6$. El mismo que se sintetiza en la Tabla 3:

Tabla 3. Análisis del signo de la segunda derivada.

Intervalo	**Signo de *F''(x)***	**¿Qué ocurre?**
(0 - 6)	Negativo	La curva es cóncava hacia abajo.
Positivo	La curva es cóncava hacia arriba.	

En el entorno de ciberseguridad se interpreta lo siguiente:

- Antes de $x = 6$:

El sistema tiene un comportamiento donde los cambios en sensibilidad producen variaciones cada vez más intensas o pronunciadas. La reducción o aumento de alertas falsas puede acelerarse.

- Después de $x = 6$:

El comportamiento empieza a estabilizarse. Los cambios en sensibilidad producen variaciones más moderadas.

De manera equivalente:
Al inicio, pequeños cambios producen grandes variaciones.

Se alcanza un punto (x=6) donde el comportamiento comienza a ser diferente.

A partir de ahí, los cambios ya no afectan igual que antes al producir variaciones más pequeñas.

1.9 Piensa y analiza

Escenario:

Un startup tecnológico desarrolla una plataforma web que permite a miles de usuarios realizar consultas simultáneas a una base de datos. Los ingenieros responsables del sistema realizan pruebas de carga en las que

se detecta que el tiempo promedio de respuesta del servidor no siempre se comporta de manera lineal al aumentar el número de usuarios conectados.

En base a los datos obtenidos, durante estas pruebas, el comportamiento del sistema es modelado mediante la función:

$$T(x) = 0.05x^3 - 0.7x^2 + 4x + 16$$

donde:

x representa el número de cientos de usuarios simultáneos,

$T(x)$ es el tiempo promedio de respuesta del servidor, medido en milisegundos.

El jefe del proyecto necesita conocer:

- Hasta qué punto el sistema funciona de manera eficiente.
- En qué punto el aumento de usuarios comienza a afectar negativamente el rendimiento del sistema.

1.10 Preguntas para reflexionar y analizar

1. Comprensión del problema

Luego de determinar lo que representa cada variable que interviene en la función:

¿Por qué es importante modelar matemáticamente el tiempo de respuesta del servidor?

2. Análisis gráfico

Una vez graficada la función $T(x)$ y observar el comportamiento de su curva:

¿Qué se puede deducir sobre el comportamiento del sistema cuando aumenta el número de usuarios?

3. Crecimiento y decrecimiento

Del análisis de sus intervalos de crecimiento y decrecimiento:

¿En qué intervalos parece que el tiempo de respuesta mejora y en cuáles comienza a empeorar?

4. Concavidad y cambio de comportamiento

Respecto al análisis de la concavidad de la curva:

¿Qué indica la forma de la gráfica respecto a la concavidad del sistema?

¿Por qué un cambio de concavidad puede ser una señal crítica para la gestión del servidor?

5. Toma de decisiones en TI

De acuerdo con el análisis de la función:

¿Qué decisiones técnicas podría tomar el equipo?

1.11 Autoevalúate

Escoge el literal de la respuesta correcta a las siguientes interrogantes:

1. La derivada de una función en un punto se interpreta como:

a) El valor máximo de la función

b) El área bajo la curva

c) La pendiente de la recta tangente en ese punto

d) El dominio de la función

2. Una función es creciente en un intervalo cuando:

a) Su gráfica es una línea recta

b) Su derivada es negativa

c) Su derivada es positiva

d) Su segunda derivada es cero

3. Si para cierto intervalo se cumple que $f'(x) < 0$, entonces la función:

a) Es constante

b) Es creciente

c) Es decreciente

d) Tiene un punto de inflexión

4. Si en un punto $x = c$ se cumple que $f'(c) = 0$, entonces:

a) La recta tangente a la gráfica de la función en $x = c$ es horizontal.

b) La función deja de ser continua en $x = c$.

c) La función alcanza necesariamente su valor máximo absoluto en $x = c$.

d) La función no está definida en x = c.

5. Desde el punto de vista gráfico, un extremo máximo relativo se identifica como:

a) El punto más bajo de la gráfica

b) Un punto donde la función cambia de decreciente a creciente

c) Un punto donde la función cambia de creciente a decreciente

d) Un punto donde la gráfica cambia de concavidad

6. La concavidad hacia arriba de una función indica que:

a) La función es decreciente

b) La segunda derivada es negativa

c) La gráfica se abre como una ∩

d) La segunda derivada es positiva

7. Un punto de inflexión se caracteriza por:

a) Tener derivada positiva

b) Ser un máximo absoluto

c) Presentar un cambio de concavidad

d) Estar en el origen

8. Si en un punto $x = c$ se cumple que $f''(c) = 0$, entonces:

a) Existe necesariamente un máximo

b) Existe necesariamente un mínimo

c) Puede existir un punto de inflexión

d) La función es constante

6. La interpretación gráfica de una función permite principalmente:

a) Resolver ecuaciones diferenciales

b) Obtener resultados exactos sin cálculos

c) Visualizar el comportamiento general de la función

d) Determinar el dominio algebraicamente

7. En el contexto de las Tecnologías de la Información, el uso de la derivada es especialmente útil para:

a) Diseñar interfaces gráficas

b) Optimizar recursos y rendimiento de sistemas

c) Crear bases de datos relacionales

d) Programar estructuras de control

Respuestas: 1-c, 2-c, 3-c, 4-a, 5-c, 6-d, 7-c, 8-c, 9-c, 10-b.

CAPÍTULO II

2 MÁXIMOS Y MÍNIMOS

2.1 Introducción

En el ámbito de las Tecnologías de la Información, gran parte de las decisiones técnicas implican optimizar recursos: minimizar el tiempo de respuesta de un servidor, reducir el consumo energético de un centro de datos, maximizar el rendimiento de un algoritmo o mejorar la eficiencia de una red, etc. Para ello, es necesario realizar primero la modelación matemática de estos procesos mediante funciones que describen el comportamiento de una variable respecto de otra.

Luego, es necesario determinar los máximos y mínimos de esas funciones porque permiten identificar sus valores extremos, que son los puntos con valores más altos o más bajos dentro de un intervalo determinado. Estos valores extremos, geométricamente, tienen una importante interpretación en problemas reales de optimización en el campo tecnológico.

De acuerdo con lo estudiado en el capítulo anterior, el análisis de extremos se apoya en el concepto de derivada, la cual permite estudiar la tasa de cambio instantánea y, en consecuencia, detectar los puntos donde la pendiente se anula o no existe. A partir de estos puntos, se aplican criterios rigurosos, como el criterio de la primera y segunda derivada, para determinar si se trata de puntos máximos, mínimos o puntos que no representan extremos.

El objetivo de este capítulo es comprender los fundamentos conceptuales de los máximos y mínimos para su identificación gráfica y analítica, y su aplicación en la resolución de problemas reales dentro de contextos tecnológicos.

Para ello, se desarrolla de manera estructurada:

- La definición formal de máximos y mínimos locales y absolutos.
- El papel de los puntos críticos y estacionarios.
- Las condiciones necesarias para la existencia de extremos.
- Los criterios analíticos de la primera y segunda derivada.
- El procedimiento sistemático para realizar el análisis completo de una función.
- Los errores frecuentes en problemas de optimización.

En síntesis, el estudio de máximos y mínimos, es una herramienta matemática estratégica para la toma de decisiones en ingeniería, informática y gestión tecnológica.

2.2 Máximos y mínimos locales

El concepto de máximo y mínimo en el Cálculo Diferencial se fundamenta en la teoría de funciones reales de variable real y constituye la base formal de los problemas de optimización. Desde un enfoque matemático riguroso, los extremos de una función se definen mediante desigualdades en un entorno del punto considerado.

Sea la función $f : D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, y $c \in D$

Se dice que $f(c)$ es un **Máximo local** o relativo, si existe un intervalo abierto *I* que contiene a *c* tal que:

$$f(c) \geq f(x), \quad \forall x \in I \cap D.$$

Es decir, el valor de la función en c es mayor o igual que los valores de la función en puntos suficientemente cercanos a c, y la gráfica presenta un "pico" en ese entorno.

De manera análoga, $f(c)$ es un **Mínimo local** o relativo, si existe un intervalo abierto *I* que contiene a *c* tal que:

$$f(c) \leq f(x), \quad \forall x \in I \cap D.$$

En este caso, la función alcanza un valor menor o igual que los valores en puntos cercanos a *c*, y geométricamente, se identifica con un "valle" en la gráfica.

Según Stewart et al. (2021) , un máximo local ocurre en *c* cuando la función cambia de creciente a decreciente alrededor de ese punto. En cambio, un mínimo local ocurre cuando la función cambia de decreciente a creciente alrededor de ese punto.

De igual manera, se define a un máximo local como un punto donde la función alcanza su mayor valor dentro de un intervalo abierto que lo contiene; y un mínimo local, como un punto en el que la función alcanza su menor valor dentro de ese mismo intervalo (Hass et al., 2022).

2.3 Máximos y mínimos absolutos

Un valor $f(c)$ es un **máximo absoluto** en D si:

$$f(c) \geq f(x), \quad \forall x \in D.$$

Y un **mínimo absoluto** si:

$$f(c) \leq f(x), \quad \forall x \in D.$$

A diferencia de los extremos locales, los absolutos consideran todo el dominio de la función, como se observa en la Figura 10.

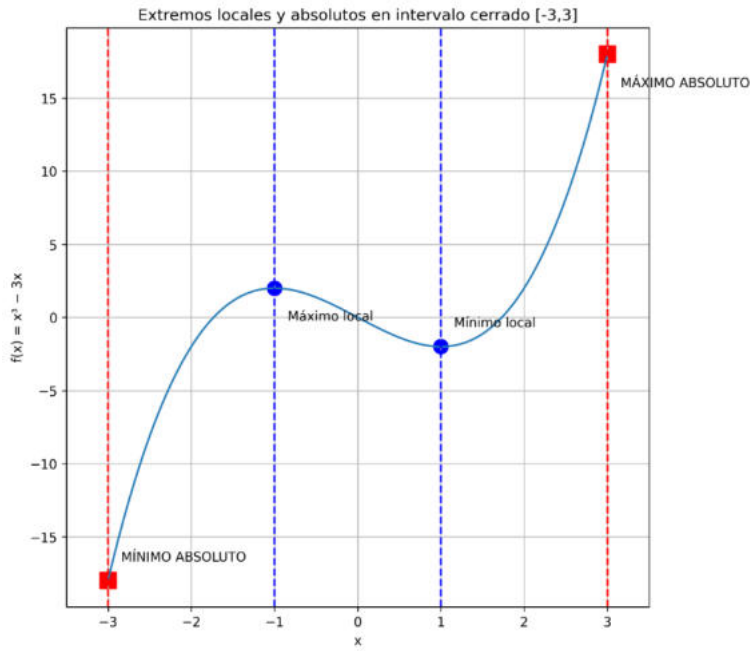


Figura 10. Extremos locales y absolutos en intervalo cerrado.

Fuente: Elaboración propia en Python.

2.4 Teorema del Valor Extremo

El estudio de los máximos y mínimos absolutos se fundamenta en uno de los resultados centrales del Análisis Matemático, conocido como Teorema del Valor Extremo:

Sea $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$. Entonces, existen puntos $c_1, c_2 \in [a,b]$ tales que:

$$f(c_1) \le f(x) \le f(c_2), \forall x \in [a,b].$$

Es decir, la función alcanza un mínimo absoluto en c_1 y un máximo absoluto en c_2.

Este teorema garantiza que toda función continua en un intervalo cerrado no solo está acotada, sino que además alcanza efectivamente sus valores extremos.

No se trata únicamente de que existan cotas superior e inferior, sino de que dichas cotas corresponden a valores reales de la función dentro del dominio (Hass et al., 2022; Stewart et al., 2021).

2.5 Punto crítico y estacionario

Según Stewart et al. (2021), dada una función *f* derivable en un intervalo abierto *I*. Un punto *c* perteneciente a *I* se denomina **punto crítico** de *f* si se cumple que:

$$f'(c) = 0$$

o $f'(c)$ no existe

Es decir, el punto crítico incluye:

- Puntos donde la derivada es cero y la recta tangente es horizontal.
- Puntos donde la función es continua pero no derivable, por ejemplo: cúspides o esquinas.

Por otro lado, un **punto estacionario** es un caso particular de punto crítico en el que:

$$f'(c) = 0$$

Geométricamente:

- La pendiente es cero, por tanto, la recta tangente es horizontal.
- La gráfica "se detiene" momentáneamente.
- Puede ser máximo, mínimo o punto de inflexión horizontal.

En consecuencia, todo punto estacionario es crítico (Ver Figura 11), pero no todo punto crítico es estacionario (Ver Figura 12).

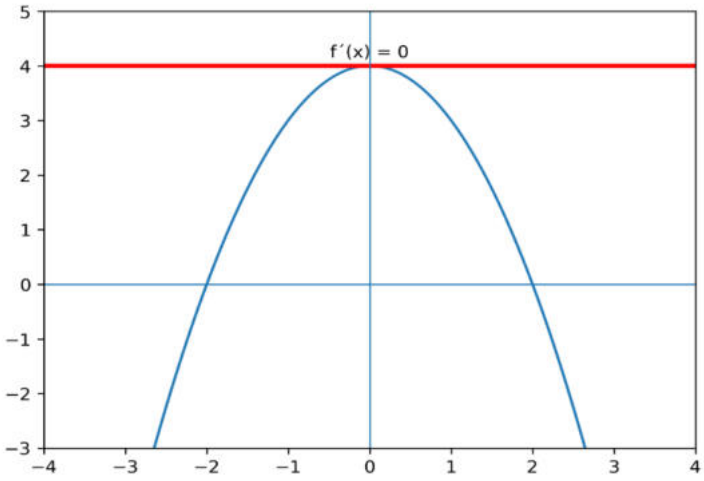


Figura 11. Punto crítico con derivada cero (estacionario), donde la tangente es horizontal.

Fuente: Elaboración propia en Python.

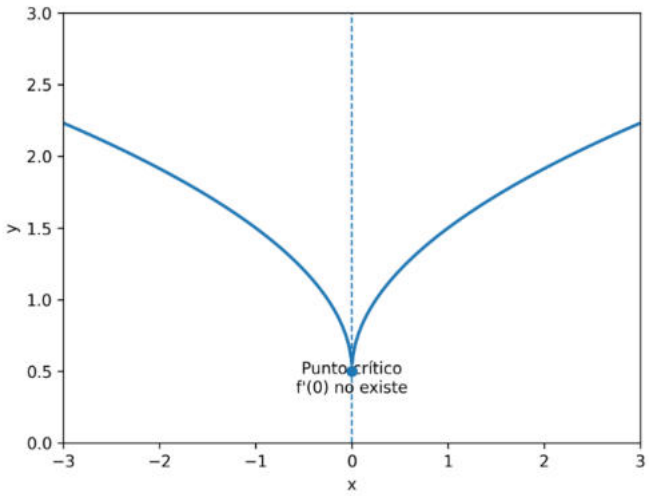


Figura 12. Punto crítico (no estacionario) donde no existe la derivada.

Fuente: Elaboración propia en Python.

Para identificar los puntos críticos de una función, se calcula su primera derivada y se iguala a cero. A continuación, se resuelve la ecuación resultante para encontrar los valores de la variable independiente que anulan la derivada. Estos valores corresponden a las abscisas de los puntos críticos, es decir, aquellos puntos donde la pendiente de la recta tangente es nula o donde la derivada no existe.

Para poder determinar si los puntos críticos encontrados son estacionarios, es necesario aplicar criterios adicionales como el criterio de la primera o segunda derivada, que se abordarán a continuación.

2.6 Criterio de la primera derivada

En el estudio del Cálculo Diferencial, uno de los problemas centrales consiste en determinar los máximos y mínimos locales de una función. Estos puntos representan estados de optimización local y poseen múltiples aplicaciones en ingeniería, economía computacional, análisis de algoritmos y gestión de sistemas tecnológicos.

El criterio de la primera derivada proporciona una herramienta rigurosa para clasificar puntos críticos mediante el análisis del signo de la derivada en intervalos adyacentes. Este criterio se fundamenta en la relación entre la derivada y el comportamiento creciente o decreciente de una función (Briggs et al., 2019).

De acuerdo con el Teorema del Valor Medio (Stewart et al., 2021), el cual establece que si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe $c \in (a,b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

El signo de la derivada determina el signo de este cociente incremental, y por ende el crecimiento y decrecimiento de la función.

O sea, si $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, es una función derivable en un intervalo abierto *I*, excepto posiblemente en un punto $c \in I$, tenemos que:

$$f'(x) > 0 \to f \text{ es creciente en } I$$

$$f'(x) < 0 \to f \text{ es decreciente en } I$$

Además, si en un entorno de *c*:

- $f'(x) > 0$ para $x < c$
- $f'(x) < 0$ para $x > c$

Entonces la función primero crece y luego decrece, lo cual implica que en c se alcanza un valor mayor que en puntos cercanos y por consiguiente es un **máximo local**.

Análogamente, si:

- $f'(x) < 0$ para $x < c$
- $f'(x) > 0$ para $x > c$

Entonces la función primero decrece y luego crece, lo cual implica que en c se alcanza un valor menor que en puntos cercanos y por consiguiente es un **mínimo local**.

A continuación, se presentan los pasos a seguir para determinar los máximos y mínimos de una función aplicando el criterio de la primera derivada:

- **Paso 1:**

Determinar el dominio de la función y confirmar que sea derivable dentro del mismo, excepto posiblemente en ciertos puntos aislados.

- **Paso 2:**

Calcular la primera derivada de la función.

- **Paso 3:**

Resolver $f'(x) = 0$, para determinar los *n* puntos críticos.

- **Paso 4:**

Ordenar los puntos críticos en la recta real y dividir el dominio en *n*+1 intervalos abiertos:

$$(-\infty, c_1),\ (c_1, c_2),\ (c_2, c_3)...(c_n, \infty)$$

- **Paso 5:**

Elegir un punto de prueba en cada intervalo y evaluar el signo de la derivada, considerando si:

- $f'(c) < 0 \rightarrow$ la función es decreciente
- $f'(c) > 0 \rightarrow$ la función es creciente

Para los resultados de este análisis se propone elaborar la Tabla 4.

Tabla 4. Análisis aplicando criterio de la primera derivada.

Valor crítico		c_1	c_2	$c_{3...}$	c_n	
Intervalo	$(-\infty, c_1)$	(c_1, c_2)	(c_2, c_3)	$\cdots$	(c_n, ∞)	
x						
Signo de $f'(x)$						
Comportamiento de la función						
Clase de valor extremo						

- **Paso 6:**

Una vez identificados los máximos y mínimos de la función, se procede a calcular las coordenadas completas de los mismos:

$$(c, f(c))$$

- **Paso 7:**

Graficar la función para verificar los resultados obtenidos analíticamente.

2.6.1 Ejemplo 2

Sea la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$, determinar analíticamente y gráficamente sus puntos máximos y mínimos aplicando el criterio de la primera derivada.

1. Como $f(x)$ es un polinomio, su dominio es:

$$Dom(f) = \mathbf{R}$$

Además, es derivable en **R.**.

2. Cálculo de la primera derivada:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$$

3. Resolución de $f'(x) = 0$ para determinar los puntos críticos:

$$4x^3 - 12x^2 + 8x = 0$$

Factorizando, se obtienen las 3 raíces de la ecuación:

$$4x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$4x(x-2)(x-1)=0$$

$$\begin{array}{lll} 4x=0 & x-1=0 & x-2=0 \\ x_1=0 & x_2=1 & x_3=2 \end{array}$$

Que corresponden a los puntos críticos: $c_1=0, c_2=1, c_3=2$

4. Se ordenan los puntos críticos y se divide en intervalos:

$$(-\infty,0),\ (0,1),\ (1,2),(2,\infty)$$

5. Elección de un punto de prueba en cada intervalo y evaluación del signo de la derivada:

- En $(-\infty,0)$: x = -1

  $f'(-1)=4(-1)^3-12(-1)^2+8(-1)=-24$
- En $(0,1)$: x = 0.5

  $f'(0.5)=4(0.5)^3-12(0.5)^2+8(0.5)=1.5$
- En $(1,2)$: x = 0.5

  $f'(1.5)=4(1.5)^3-12(1.5)^2+8(1.5)=-1.5$
- En $(2,\infty)$: x = 3

  $f'(3)=4(3)^3-12(3)^2+8(3)=24$

Se realiza el análisis de estos resultados en la Tabla 5:

Tabla 5. Análisis aplicando criterio de la primera derivada, ejemplo 2.

Valor crítico		0	1	2	
Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
x	-1	0.5	1.5	3
Signo de $f'(x)$	-	+	-	+
Comportamiento de la función	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente
Clase de valor extremo		Mínimo local	Máximo local	Mínimo local

6. Cálculo de coordenadas completas de los puntos:

- Para $x = 0$

$$f(0) = 0^4 - 4(0^3) + 4(0^2) = 0$$

Mínimo local: (0,0)

- Para $x = 1$

$$f(1) = 1^4 - 4(1^3) + 4(1^2) = 1$$

Máximo local: (1,1)

- Para $x = 2$

$$f(2) = 2^4 - 4(2^3) + 4(2^2) = 0$$

Mínimo local: (2,0)

7. Gráfica de la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

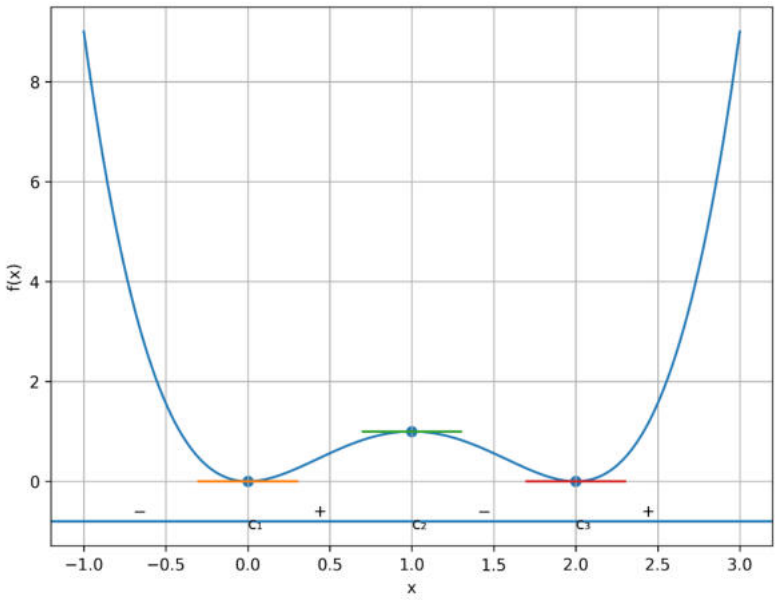


Figura 13. Gráfica de función $x^4 - 4x^3 + 4x^2$.

Fuente: Elaboración propia en Python.

La Figura 13 confirma rigurosamente los resultados analíticos obtenidos:

- En x=0 la función presenta un mínimo local.
- En x=1 se observa un máximo local.
- En x=2 aparece nuevamente un mínimo local.

Además, se verifica visualmente el cambio de comportamiento de la función:

- Decrece antes de 0 y luego crece → mínimo.
- Crece antes de 1 y luego decrece → máximo.
- Decrece antes de 2 y luego crece → mínimo.

2.7 Criterio de la segunda derivada

El criterio de la segunda derivada, para determinar los máximos y mínimos, se basa en el análisis de la concavidad de la curva que representa a la función, lo cual permitirá clasificar a los valores críticos como máximos o mínimos locales. Este procedimiento aprovecha la información proporcionada por el signo de la segunda derivada, la cual describe el comportamiento geométrico de la gráfica en torno a los puntos considerados.

En el presente apartado se retomarán y aplicarán los conceptos desarrollados en el Capítulo 1, particularmente los relacionados con la concavidad de una curva y la identificación de puntos de inflexión, con el fin de establecer una conexión coherente entre la interpretación geométrica y el análisis analítico de los extremos de una función.

Sea f una función dos veces derivable en un entorno de c, tal que:

$$f'(c) = 0$$

Entonces,

- Si

$$f''(c) > 0,$$

La función es cóncava hacia arriba tiene un **mínimo local** en *c*.

- Si

$$f''(c) < 0,$$

La función es cóncava hacia abajo tiene un **máximo local** en *c*.

- Si

$$f''(c) = 0,$$

Existe posible punto **de inflexión e**n *c*, porque ésta es condición necesaria pero no suficiente. Puede ser extremo degenerado o no ser nada.

Los pasos a seguir para determinar los máximos y mínimos de una función aplicando el criterio de la segunda derivada son:

- **Paso 1:**

Determinar el dominio de la función y confirmar que sea dos veces derivable dentro del mismo, excepto posiblemente en ciertos puntos aislados.

- **Paso 2:**

Calcular la primera derivada de la función.

- **Paso 3:**

Resolver $f'(x) = 0$, para determinar los *n* puntos críticos.

- **Paso 4:**

Calcular la segunda derivada de la función.

- **Paso 5:**

Evaluar el signo de la segunda derivada para cada uno de los *n* puntos críticos, considerando:

- $f''(c) > 0 \rightarrow f$ es cóncava hacia arriba y *c* es un **mínimo local**.
- $f''(c) < 0 \rightarrow f$ es cóncava hacia abajo y *c* es un **máximo local**.

Para los resultados de este análisis se propone elaborar la Tabla 6.

Tabla 6. Análisis aplicando criterio de la segunda derivada.

Valor crítico	c_1	c_2	$c_{3...}$	c_n
Signo de $f''(x)$				
Concavidad de la función				
Clase de valor extremo				

- **Paso 6:**

Calcular las coordenadas completas de los extremos identificados:

$$(c, f(c))$$

- **Paso 7:**

  Graficar la función para corroborar los resultados obtenidos analíticamente.

2.7.1 Ejemplo 3

A manera de ejemplo, se determinará analíticamente y gráficamente los puntos máximos y mínimos de la función del ejemplo 2: $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$, aplicando el criterio de la segunda derivada.

1. Como se vio en el ejemplo 2, $f(x)$ un polinomio de grado 4, por lo que es dos veces derivable en **R.**.
2. La primera derivada obtenida:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$$

3. Como valores críticos al hacer $f'(x) = 0$, se obtuvieron:

$$c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 2$$

4. Se calcula la segunda derivada de la función:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 8$$

5. Se evalúa el signo de la segunda derivada para cada uno de los tres puntos críticos:

- Para $c_1 = 0$

$$f''(0) = 12(0^2) - 24(0) + 8 = 8$$

- Para $c_2 = 1$

$$f''(1) = 12(1^2) - 24(1) + 8 = -4$$

- Para $c_3 = 2$

$$f''(2) = 12(2^2) - 24(2) + 8 = 8$$

Los resultados se analizan en la Tabla 7.

Tabla 7. Análisis aplicando criterio de la segunda derivada, ejemplo 3.

Valor crítico	0	1	2
Signo de $f''(x)$	+	-	+
Concavidad de la función	Hacia arriba	Hacia abajo	Hacia arriba
Clase de valor extremo	Mínimo local	Máximo local	Mínimo local

Como se observa, tenemos los mismos resultados obtenidos con el criterio de la primera derivada.

6. Se tendrían las mismas coordenadas completas de los puntos extremos:

Punto Mínimo local: (0,0)

Punto Máximo local: (1,1)

Punto Mínimo local: (2,0)

7. La gráfica de la función correspondería también a la ilustración 10.

2.8 Método combinado de clasificación de puntos críticos

En el desarrollo previo del capítulo se han presentado dos herramientas fundamentales para la clasificación de extremos locales:

- El criterio de la primera derivada, basado en el análisis del cambio de signo de $f'(x)$.
- El criterio de la segunda derivada, fundamentado en la concavidad de la función, según el signo de $f''(x)$.

Cada uno de estos criterios posee las siguientes ventajas y limitaciones:

- El criterio de la primera derivada es general, pues funciona siempre que la función sea derivable alrededor del punto crítico.
- El criterio de la segunda derivada es más eficiente, pero puede resultar inconcluso cuando:

$$f''(c) = 0$$

En la práctica, ambos criterios no se utilizan de forma aislada, sino de manera complementaria.

Por ello, se propone un método sistemático de análisis que articula de manera complementaria el criterio de la primera derivada y el criterio de la segunda derivada. A este procedimiento se le denomina **método combinado de clasificación de puntos críticos**, el cual consiste en una

secuencia analítica estructurada que integra, de forma ordenada y coherente:

- La determinación de puntos críticos mediante la condición $f'(c) = 0$ ó $f'(c)$ no existe.
- La evaluación del signo de la segunda derivada $f''(c)$, cuando exista.
- El análisis del cambio de signo de la primera derivada en un entorno de c, cuando el segundo criterio sea inconcluso, es decir $f''(c) = 0$.

Este método permite clasificar rigurosamente la naturaleza de los puntos críticos de una función suficientemente regular, y puede formalizarse en los siguientes pasos:

- **Paso 1:**

Determinar el dominio de la función y confirmar que sea dos veces derivable dentro del mismo, excepto posiblemente en ciertos puntos aislados.

- **Paso 2:**

Calcular la primera derivada de la función.

- **Paso 3:**

Resolver $f'(x)=0$, para determinar los *n* puntos críticos.

- **Paso 4:**

Calcular la segunda derivada de la función

- **Paso 5:**

Evaluar el signo de la segunda derivada para cada uno de los *n* puntos críticos, cuando exista, registrando y analizando los resultados en la tabla 5.

Si el segundo criterio es inconcluso, $f''(x)=0$, realizar el análisis del cambio de signo de la primera derivada en un entorno de c, de acuerdo con tabla 3.

- **Paso 6:**

  Calcular $f(c)$ para determinar las coordenadas completas de los extremos identificados:

$$(c, f(c))$$

- **Paso 7:**

  Graficar la función para verificar los resultados obtenidos analíticamente.

2.8.1 Ejemplo 4

Determinar los máximos y mínimo locales de la siguiente función aplicando el método combinado de clasificación de puntos críticos:

$$f(x) = x^5 - 5x^4$$

1. La función $f(x)$ es un polinomio, por tanto, su dominio es:

$$Dom(f) = \mathbf{R}$$

   Es dos veces derivable en todo **R.**.

2. Cálculo de la primera derivada

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3$$

3. Cálculo de valores críticos:

$$f'(x) = 0$$

$$5x^4 - 20x^3 = 0$$

$$5x^3(x-4) = 0$$

$$x^3 = 0 \qquad x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = 0 \qquad x_3 = 4$$

   Dos valores críticos:

$$c_1 = 0, c_2 = 4$$

4. Cálculo de la segunda derivada

$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2$$

5. Evaluación del signo de la segunda derivada en Tabla 8.

Tabla 8. Análisis aplicando criterio de la segunda derivada, ejemplo 4.

Valor crítico	0	4
Signo de $f''(x)$	$f''(0)=0$	+
Concavidad de la función	Inconcluso	Hacia arriba
Clase de valor extremo	Requiere análisis adicional	Mínimo local

Se procede a realizar en la Tabla 9 el análisis del cambio de signo de la primera derivada en el entorno de c_1=0:

$$f'(x)=5x^4-20x^3$$

Tabla 9. Análisis aplicando criterio de la primera derivada, ejemplo 4.

Valor crítico	0	
Intervalo	$(-\infty,0)$	$(0,4)$
x	-1	1
Signo de $f'(x)$	+	-
Comportamiento de la función	Creciente	Decreciente
Clase de valor extremo	Máximo local	

6. Cálculo de coordenadas completas de extremos identificados:

$$f(x) = x^5 - 5x^4$$

- Para $x = 0$

$$f(0) = 0^5 - 5(0^4) = 0$$

Punto Máximo local: (0,0)

- Para x = 4

$$f(4) = 4^5 - 5(4^4) = -256$$

Punto Mínimo local: (4,-256)

7. Gráfica de la función $f(x) = x^5 - 5x^4$:

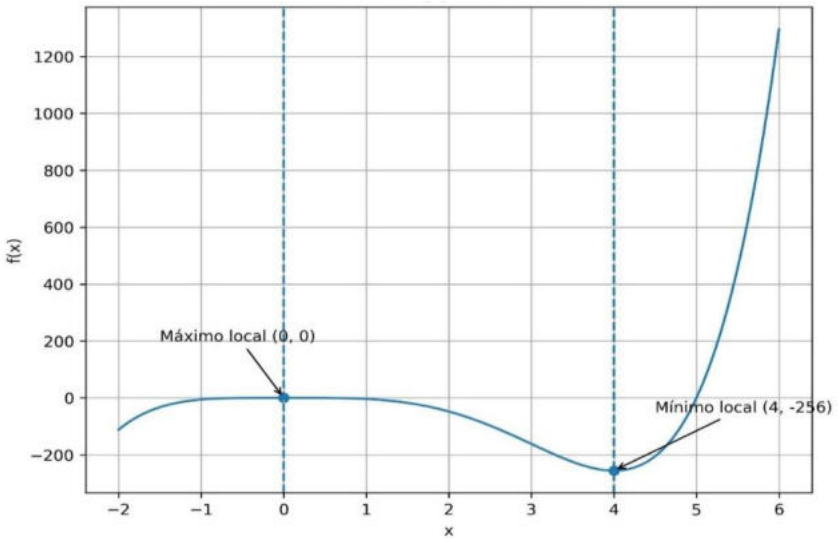


Figura 14. Gráfica de función x^5-$5x^4$.

Fuente: Elaboración propia en Python.

En la Figura 14 se identifican dos puntos destacados:

- Máximo local: (0,0)
- Mínimo local: (4,-256)

Estos resultados coinciden con los obtenidos analíticamente.

Ejemplo 5

Sea la función:

$$f(x) = xe^{-x}$$

Determinar sus extremos relativos e identificarlos como máximos o mínimos aplicando el método combinado de clasificación de puntos críticos.

1. La función $f(x)$ es producto de
    - La función polinómica *x*.
    - La función exponencial e^{-x}.

Las dos funciones son dos veces derivables en todo $\mathbf{R}$:

$$Dom(f) = \mathbf{R}$$

Cálculo de la primera derivada

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= x\frac{d}{dx}(e^{-x}) + e^{-x}\frac{d}{dx}(x) \\
&= x(-e^{-x}) + e^{-x}(1) \\
&= -xe^{-x} + e^{-x} \\
&= e^{-x}(1-x)
\end{aligned}
$$

2. Cálculo de valores críticos:

$$f'(x) = 0$$

$$e^{-x}(1-x) = 0$$

Como para todo x: $e^{-x} \neq 0$, se tiene:

$$1 - x = 0$$
$$x = 1$$

Existe un único valor crítico: $c = 1$

3. Cálculo de la segunda derivada

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= e^{-x}\frac{d}{dx}(1-x) + (1-x)\frac{d}{dx}(e^{-x}) \\
&= e^{-x}(-1) + (1-x)(-e^{-x}) \\
&= -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} \\
&= -2e^{-x} + xe^{-x} \\
&= e^{-x}(x-2)
\end{aligned}
$$

4. Evaluación del signo de la segunda derivada (Ver Tabla 10):

Tabla 10. Análisis aplicando criterio de la segunda derivada, ejemplo 5.

Valor crítico	1
Signo de $f''(x)$	-
Concavidad de la función	Hacia abajo
Clase de valor extremo	Máximo local

Por otro lado, dado que el único punto crítico es $x=1$, que en dicho punto la segunda derivada es negativa, y que los límites en los extremos del dominio satisfacen

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,$ se concluye que para $x=1$ existe un **máximo absoluto** en todo **R.**

5. Cálculo de coordenadas completas de extremos identificados:

$f(x)=xe^{-x}$

Para $x = 1$

$$f(1)=1(e^{-1})=\frac{1}{e}$$

Máximo absoluto: $(1,\frac{1}{e})$

6. Gráfica de la función: $f(x) = xe^{-x}$

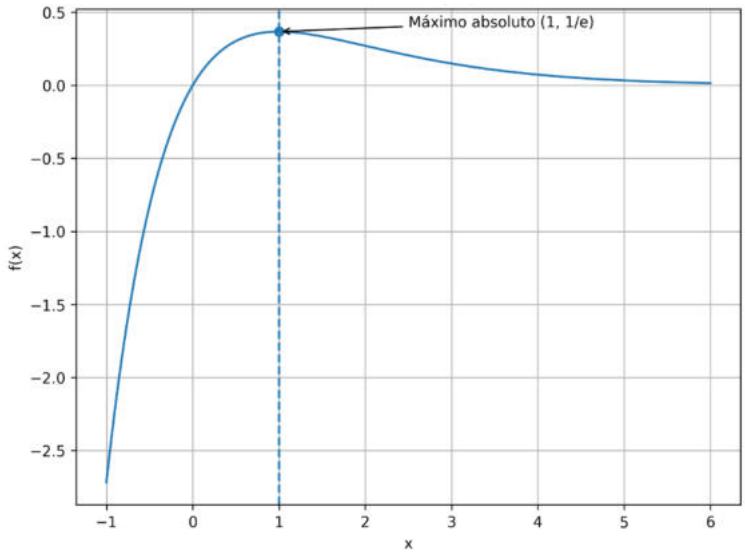


Figura 15. Gráfica de función xe^{-x}

Fuente: Elaboración propia en Python.

En la Figura 15 , se identifica un máximo absoluto en $(1, \frac{1}{e})$, que coincide con el valor extremo obtenido analíticamente.

2.9 Piensa y analiza

Escenario:

Los ingenieros de una empresa de comercio electrónico han modelado el tiempo promedio de respuesta del servidor S(x), en milisegundos, en

función del número de peticiones simultáneas x, en cientos de solicitudes por segundo, mediante la función:

$$S(x) = x^4 - 3x^3 + 12$$

El equipo encargado de la infraestructura desea determinar el nivel de carga que minimiza el tiempo de respuesta del servidor y analizar el comportamiento del sistema ante sobrecargas.

2.10 Preguntas para reflexionar y analizar:

Análisis preliminar

a) Determine el dominio relevante del modelo en el contexto tecnológico.

b) Justifique si la función es derivable y dos veces derivable.

Análisis matemático

a) Calcule la primera derivada $T'(x)$.

b) Determine los puntos críticos resolviendo $T'(x)=0$.

c) Calcule la segunda derivada $T''(x)$.

d) Clasifique los puntos críticos utilizando:

- El criterio de la segunda derivada.

- El criterio de la primera derivada cuando la segunda derivada sea inconclusa.

Interpretación tecnológica

a) ¿En qué nivel de carga el sistema presenta el menor tiempo de respuesta?

b) ¿Existe un punto donde el tiempo comienza a aumentar rápidamente?

c) ¿Qué significa matemáticamente que el sistema tenga un mínimo local en este contexto?

d) ¿Podría existir un mínimo absoluto dentro del dominio realista del problema?

2.11 Autoevalúate

Escoge el literal de la respuesta correcta a las siguientes interrogantes:

1. Un punto crítico de una función derivable se define como aquel donde:

a) La función es continua.

b) La segunda derivada es positiva.

c) La función cambia de concavidad.

d) La primera derivada es cero o no existe.

2. Si en un punto crítico c se cumple que $f''(c) > 0$, entonces:

a) Existe un máximo absoluto.

b) Existe un punto de inflexión.

c) Existe un mínimo local.

d) La función es decreciente.

3. Si en un punto crítico c se cumple que $f''(c) < 0$, entonces:

a) La función es creciente.

b) Existe un mínimo absoluto.

c) Existe un máximo local.

d) Existe un punto estacionario no extremo.

4. Si $f''(c) = 0$, el criterio de la segunda derivada:

a) Determina que existe un mínimo local.

b) Es inconcluso y debe aplicarse el criterio de la primera derivada.

c) Determina que existe un máximo local.

d) Garantiza un punto de inflexión.

5. Si en el entorno de un punto crítico, una función cambia de signo de la primera derivada, de positivo a negativo, entonces:

a) Existe un máximo local.

b) Existe un punto de inflexión.

c) Existe un mínimo absoluto.

d) La función no tiene extremos.

6. Un punto estacionario es aquel donde:

a) La función no es continua.

b) La derivada no existe.

c) La derivada es cero.

d) La segunda derivada es negativa.

7. En el criterio de la primera derivada, un mínimo local ocurre cuando:

a) La derivada cambia de positivo a negativo.

b) La derivada cambia de negativo a positivo.

c) La segunda derivada es negativa.

d) La función es continua.

8. Si $f'(x)$ no cambia de signo en un punto crítico, entonces:

a) Existe máximo local.

b) Existe mínimo local.

c) Existe mínimo absoluto.

d) No existe extremo local en ese punto.

9. Si una función es decreciente en un intervalo, entonces:

a) $f'(x) > 0$

b) $f''(x) > 0$

c) $f'(x) < 0$

d) $f(x) < 0$

10. Si una función es creciente en un intervalo, entonces:

a) $f'(x) > 0$

b) $f''(x) > 0$

c) $f'(x) < 0$

d) $f(x) < 0$

Respuestas: 1-d, 2-c, 3-c, 4-b, 5-a, 6-c, 7-b, 8-d, 9-c, 10-a

CAPÍTULO III

3 ANÁLISIS Y CONSTRUCCIÓN AVANZADA DE GRÁFICAS MEDIANTE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

3.1 Introducción

En el estudio del cálculo diferencial, la determinación de máximos y mínimos constituye una herramienta esencial para analizar el comportamiento local de una función (Stewart et al., 2021). No obstante, en el contexto de las Tecnologías de la Información, este análisis no debe limitarse a la identificación aislada de puntos críticos, sino que debe integrarse dentro de una comprensión global del comportamiento funcional del sistema.

La representación gráfica de funciones trasciende su carácter meramente visual para convertirse en un instrumento analítico clave en la toma de decisiones dentro de entornos tecnológicos. En ámbitos como el rendimiento de sistemas, la optimización de algoritmos, el análisis de datos y la gestión de recursos computacionales, las funciones matemáticas modelan fenómenos reales cuya interpretación rigurosa resulta indispensable (Cormen et al., 2022).

Este capítulo tiene como objetivo desarrollar una metodología sistemática para la construcción de gráficas a partir del análisis de derivadas, integrando conceptos como crecimiento y decrecimiento, concavidad, puntos de inflexión y extremos relativos. Si bien actualmente existen herramientas computacionales que generan gráficas de manera automatizada, es fundamental que el estudiante adquiera la

capacidad de bosquejar curvas manualmente a partir de criterios analíticos. Esta competencia es importante en contextos evaluativos donde no se le permite al estudiante el uso de dispositivos electrónicos como celulares o computadores.

Además, se enfatiza la aplicabilidad de los conceptos teóricos abordados en escenarios propios de las tecnologías de la información, destacando la importancia de validar los resultados analíticos mediante herramientas computacionales como Python y Google Colab. De esta manera, el estudiante no solo aprende a construir gráficas, sino también a interpretar modelos, identificar comportamientos críticos y evaluar el desempeño de sistemas reales en el ámbito de sus competencias profesionales.

En conclusión, el presente capítulo da un sentido de utilidad al estudio del cálculo diferencial al abordar su aplicación en problemas tecnológicos, proporcionando al estudiante de tecnologías de la información, las competencias necesarias para transformar resultados matemáticos en herramientas útiles para la toma de decisiones en ingeniería y ciencias de la computación.

3.2 Utilidad de la representación gráfica de funciones en Tecnologías de la Información

En el campo de las tecnologías de la información, el análisis de funciones y su representación gráfica tienen un papel fundamental en la comprensión, evaluación y optimización de sistemas. A diferencia de un enfoque puramente matemático, donde la gráfica puede considerarse un

recurso ilustrativo, en TI constituye una herramienta crítica para la toma de decisiones basada en datos y modelos (James et al., 2021).

Diversos fenómenos en sistemas computacionales pueden ser modelados mediante funciones de una variable (Cormen et al., 2022). Por ejemplo:

- El tiempo de respuesta de un servidor en función del número de solicitudes
- El consumo de memoria en relación con el tamaño de los datos procesados
- El costo computacional de un algoritmo según el volumen de entrada
- El rendimiento de una red en función del tráfico

En todos estos casos, la gráfica de la función permite visualizar patrones que no siempre son evidentes únicamente a partir de la expresión algebraica (Ver Figura 16).



Figura 16. Utilidad de la gráfica de funciones

Fuente: Elaboración propia.

3.2.1 Análisis del comportamiento del sistema

La identificación de intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función permite determinar cómo evoluciona un sistema ante cambios en sus variables de entrada. Por ejemplo, un incremento continuo en el tiempo de respuesta puede indicar una zona de saturación, mientras que un descenso puede señalar una región de operación eficiente.

Además, los máximos y mínimos proporcionan información sobre:

- Puntos de sobrecarga (máximos locales)
- Configuraciones óptimas (mínimos locales)
- Límites operativos del sistema

3.2.2 Detección de cambios estructurales

Otro de los puntos relevantes son los de inflexión, porque indican transiciones en el comportamiento de un sistema. Estos puntos pueden representar, por ejemplo:

- Cambios en la eficiencia de un algoritmo
- Transiciones entre estados estables e inestables
- Variaciones en la tendencia de crecimiento del uso de recursos

3.2.3 Optimización y toma de decisiones

La optimización de recursos es uno de los objetivos principales en toda empresa. En este sentido, el análisis de los máximos y mínimos permite:

- Determinar configuraciones óptimas de sistemas
- Minimizar costos computacionales
- Maximizar rendimiento
- Balancear carga de trabajo

3.2.4 Validación de modelos computacionales

En la actualidad y más aún en el área de tecnologías de la información, gran parte del análisis de funciones se realiza mediante herramientas computacionales. Sin embargo, depender exclusivamente de las aplicaciones informáticas puede conducir a interpretaciones erróneas si no se comprende el comportamiento subyacente de la función.
El análisis de la gráfica de la función de un modelo matemático permite:

- Verificar resultados obtenidos por simulación
- Detectar inconsistencias en modelos
- Comprender limitaciones del sistema

3.2.5 Relación con el análisis de datos

Hoy en día, con el auge de la ciencia de datos, las funciones y sus gráficas permiten modelar tendencias y comportamientos de los datos. La correcta interpretación de máximos, mínimos y cambios de concavidad es necesaria para:

- Identificar patrones
- Detectar anomalías
- Realizar predicciones fundamentadas

3.3 Procedimiento sistemático para construir una gráfica

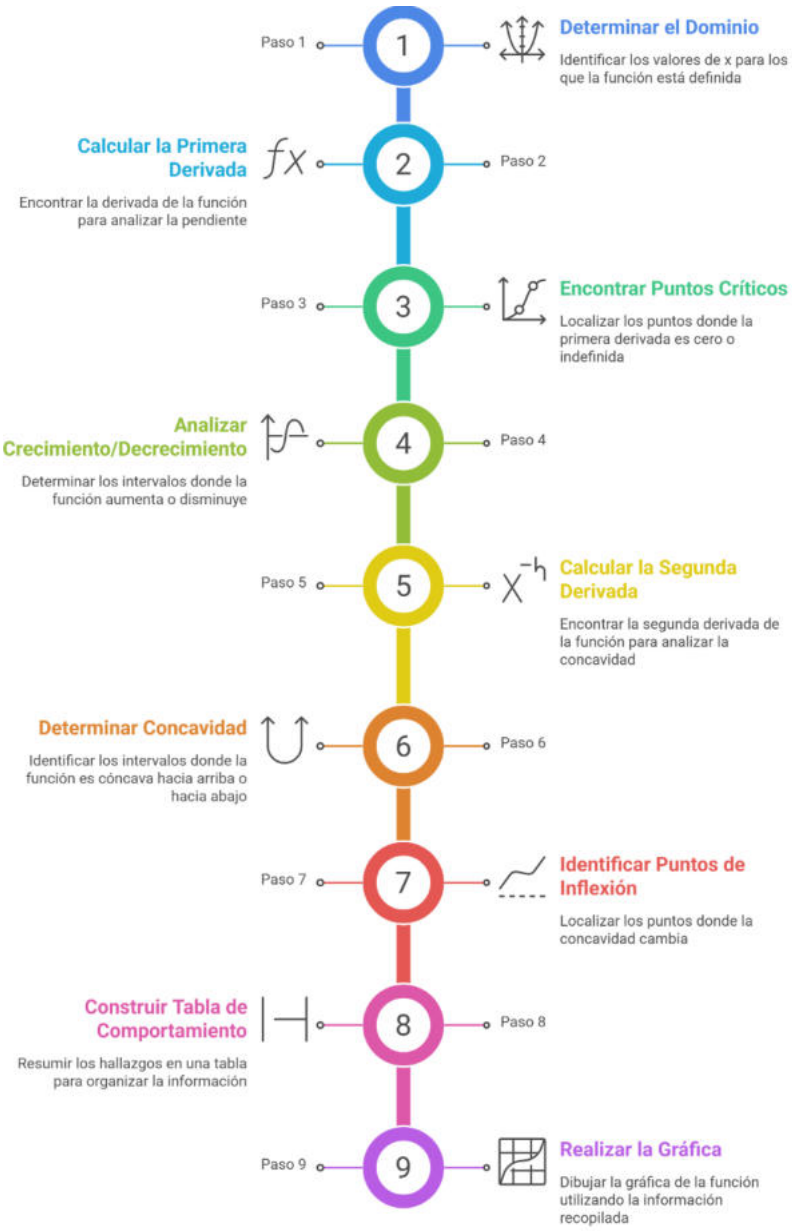


Figura 17. Algoritmo para construir la gráfica de una función.

Fuente: Elaboración propia.

Los pasos del procedimiento sistemático para construir una gráfica, esquematizado en la Figura 17, se describen brevemente dado que involucran conceptos previamente estudiados en capítulos anteriores.

Paso 1: Determinar el dominio

El dominio de una función corresponde al conjunto de valores para los cuales la función está definida. La determinación del mismo es fundamental, ya que delimita el intervalo en el que se realizará todo el análisis posterior.

Para encontrar el dominio, se deben considerar restricciones tales como:

- División entre cero
- Raíces de índice par con radicando negativo
- Restricciones propias del contexto, por ejemplo, valores negativos no válidos en aplicaciones reales.

En contextos de Tecnologías de la Información, el dominio puede estar limitado por condiciones físicas u operativas, como el número de usuarios, capacidad de memoria o tiempo de ejecución.

Paso 2: Calcular la primera derivada

La primera derivada de la función permite analizar la tasa de cambio instantánea, desde el punto de vista geométrico, proporciona información sobre la pendiente (Larson & Edwards, 2021). El cálculo debe realizarse aplicando correctamente las reglas de derivación.

Paso 3: Encontrar puntos críticos

Los puntos críticos son aquellos valores de la variable donde la primera derivada es igual a cero o no existe, es decir:

$$f'(x) = 0 \text{ o } f'(x) \text{ no existe}$$

Estos puntos son los posibles máximos o mínimos locales o puntos de inflexión.

Paso 4: Analizar crecimiento/decrecimiento

Después de calcular los puntos críticos se analiza el signo de la primera derivada en los intervalos determinados por dichos puntos.

Si $f'(x) > 0$, la función es creciente

Si $f'(x) < 0$, la función es decreciente

Este análisis permite determinar los intervalos en que la curva es creciente o decreciente. En aplicaciones de TI, este paso permite identificar, por ejemplo, zonas donde el sistema mejora o empeora su rendimiento.

Paso 5: Calcular la segunda derivada

Se calcula la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x)$$

Paso 6: Determinar concavidad

El signo de la segunda derivada permite establecer la concavidad o forma de la curva y clasificar a los valores críticos como máximos o mínimos.

Si $f''(x) > 0$, la función es cóncava hacia arriba y el punto crítico corresponde a un punto mínimo.

Si $f''(x) < 0$, la función es cóncava hacia abajo y el punto crítico corresponde a un punto máximo.

Paso 7: Identificar puntos de inflexión

Los puntos de inflexión son aquellos donde la función cambia de concavidad. Se determinan resolviendo: $f''(x) = 0$

y verificando un cambio de signo en la segunda derivada.

Estos puntos son importantes en el contexto de las tecnologías de la información, ya que pueden representar cambios en el comportamiento del sistema, como transiciones entre estados de eficiencia e ineficiencia.

Paso 8: Construir la tabla de comportamiento

Los resultados, obtenidos hasta el momento, se organizan y registran en la Tabla 11 que sintetiza: Intervalos de análisis, signo de la primera y segunda derivada, concavidad, tipo de comportamiento (creciente, decreciente, máximo local, mínimo local, punto de inflexión). Además,

esta tabla permite visualizar de forma estructurada la evolución de la función y facilita la construcción de su gráfica.

Tabla 11. Tabla de comportamiento.

Intervalo / Punto	Valor de x	$C(x)$	Signo $C'(x)$	Signo $C''(x)$	Concavidad	Comportamiento	Interpretación TI

Paso 9: Realizar la gráfica

Se construye la gráfica utilizando toda la información obtenida en los pasos anteriores. Para ello se deben considerar, además de los datos de la tabla de comportamiento, las intersecciones con los ejes de coordenadas y la forma general de la función según su concavidad.

Para realizar la gráfica de forma manual se debe seguir el siguiente proceso:

1. Trazar el sistema de ejes coordenados, estableciendo una escala adecuada que permita visualizar claramente los valores relevantes de la función, en particular el entorno del punto crítico identificado.
2. Ubicar los puntos claves: máximos, mínimos, inflexión, intersecciones con los ejes.
3. Dividir el dominio en intervalos utilizando los puntos críticos e inflexión como separadores de los mismos.

4. Determinar la tendencia (crecimiento o decrecimiento) en cada intervalo, dibujando una flecha tenue que indique la dirección de la curva.
5. Incorporar la concavidad para definir la forma de la curva.
6. Conectar por puntos usando curvas suaves, respetando la tendencia y concavidad.
7. Verificar que la gráfica corresponde fielmente a los datos de la tabla de comportamiento.

Finalmente, esta representación gráfica realizada de forma manual se verifica mediante herramientas computacionales como Google Colab, lo que permite validar también el análisis teórico realizado.

3.4 Uso de Google Colab para la graficación de funciones

Google Colab (Colaboratory) es un servicio gratuito basado en la nube que permite ejecutar cuadernos interactivos de Python similares a los de Jupyter Notebook. Este entorno combina texto explicativo, ecuaciones matemáticas y código ejecutable dentro de un mismo documento.

Las principales características de Google Colab incluyen:

- Ejecución de Python sin instalación local.
- Almacenamiento automático en Google Drive.
- Posibilidad de compartir notebooks para trabajo colaborativo.
- Acceso a recursos computacionales en la nube.
- Integración con bibliotecas científicas como **NumPy**, que facilita el cálculo numérico eficiente mediante arreglos

multidimensionales (Harris et al., 2020); **SciPy**, que ofrece algoritmos para optimización, integración y álgebra lineal (Virtanen et al., 2020); **SymPy**, que permite realizar cálculos simbólicos y manipulación algebraica (Meurer et al., 2017).

Además, integra la librería especializada **Matplotlib**, que se emplea principalmente para graficar funciones, facilitando la comprensión de conceptos como crecimiento, decrecimiento y comportamiento general de una función en un intervalo determinado (Hunter, 2007). Normalmente se combina con NumPy para generar los datos.

Una codificación básica para generar una gráfica (Ver Figura 18) en Google Colab seria:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(-10, 10, 100)
y = -x**2

plt.plot(x, y)
plt.title("Gráfica de y = -x^2")
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.grid()
plt.show()
```

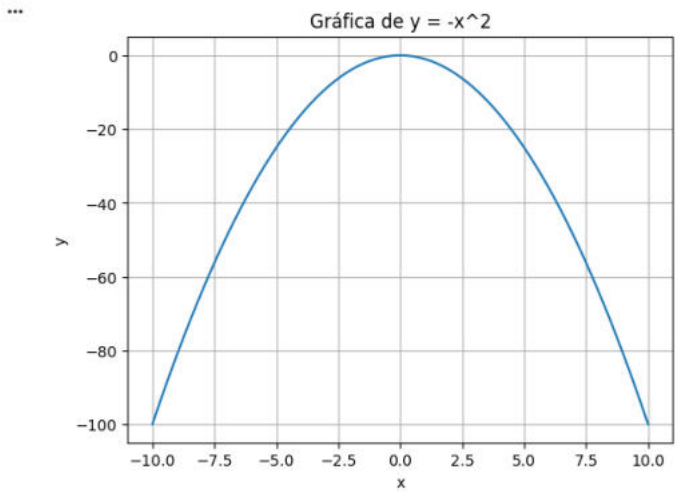


Figura 18. Ejemplo de graficación básica en Google Colab.

Fuente: Elaboración propia.

3.4.1 Ejemplo 6

Un sistema monitorea el uso de CPU en función del tiempo durante la ejecución de un proceso simple, siendo la función modelo:

$$C(x) = x^2 - 4x + 5$$

Donde:

x = Tiempo en segundos

$C(x)$ = Uso de CPU (%)

Paso 1: Determinar el dominio

Dado que $C(x)$ es una función polinómica básica, su dominio corresponde a todos los números reales, ya que este tipo de funciones está definido para cualquier valor real de x, es decir:

$$Dom(C) = \mathbf{R}$$

Pero, se debe considerar que en el contexto de TI no existe tiempo negativo, por tanto, el dominio real es:

$$Dom(C) = [0, \infty)$$

Paso 2: Calcular la primera derivada

$$C'(x) = 2x - 4$$

Paso 3: Encontrar puntos críticos

En este caso, al igualar a cero la primera derivada se obtiene una ecuación lineal o de primer grado, la cual posee una única solución. En consecuencia, existe un solo valor crítico:

$$2x-4=0$$
$$2x=4$$
$$x=\frac{4}{2}$$
$$x=2$$

Paso 4: Analizar crecimiento/decrecimiento

$Si\, x<2 \Rightarrow C'(x)<0 \rightarrow$ decreciente

$Si\, x>2 \Rightarrow C'(x)>0 \rightarrow$ creciente

Paso 5: Calcular la segunda derivada

$$C''(x)=2$$

Paso 6: Determinar concavidad

Como la segunda derivada es constante e igual a 2, y por tanto positiva en todo el dominio, la función es siempre cóncava hacia arriba. En consecuencia, x=2 corresponde a un punto mínimo.

Paso 7: Identificar puntos de inflexión

En este caso, no existe punto de inflexión, porque la segunda derivada es una función constante y no se anula en ningún punto,

Paso 8: Construir tabla de comportamiento

Tabla 12. Tabla de comportamiento de ejemplo 6.

Intervalo / Punto	Valor de x	$C(x)$	Signo $C'(x)$	Signo $C''(x)$	Concavidad	Comportamiento	Interpretación TI
Intervalo	$0 < x < 2$	-	Negativo	-	-	Decreciente	Disminuye uso de CPU
Punto crítico	$x = 2$	1	-	Positivo	Hacia arriba	Mínimo local	Uso óptimo de CPU
Intervalo	$x > 2$	-	Positivo	-	-	Creciente	Aumenta uso de CPU

Paso 9: Realizar la gráfica

De acuerdo con el procedimiento indicado:

1. Se traza el sistema de ejes cartesianos. En caso de utilizar una hoja tamaño A4, se recomienda emplear la siguiente escala:

- Eje x:

1 unidad = 1 cm

Intervalo recomendado: de 0 a 4

- Eje y:

1 unidad = 1 cm

Intervalo recomendado: de 0 a 6

Además:

- Centrar el origen (0,0) ligeramente hacia la izquierda del centro de la hoja
- Dejar margen para extender la gráfica hacia la derecha (hasta x = 4), recordando que, en este caso, no existen valores negativos de x en el dominio de la función.
- Ubicar el eje x en la parte inferior media para visualizar crecimiento vertical.

2. Se ubican los siguientes puntos claves:

- Punto mínimo: (2,1)
- Intersección con el eje y: (0,5)

No existen intersecciones con el eje x, ya que la función no posee raíces reales.

3. Se divide el dominio en los siguientes intervalos, usando como limite el único valor critico x = 2: (-∞, 2) y (2, ∞).
4. Se determinar la tendencia en cada intervalo:

En el intervalo (-∞, 2) la curva es decreciente y se dibuja una flecha tenue hacia abajo.

En el intervalo (2, ∞) la curva es creciente y se dibuja una flecha tenue hacia arriba.

5. Se incorpora el hecho de que la función es cóncava hacia arriba en todo su dominio, lo que implica que la gráfica va tomando forma de parábola abierta hacia arriba.
6. Se conectan todos los puntos mediante curva suave, considerando la tendencia y concavidad, como se puede ver en la Figura 19.

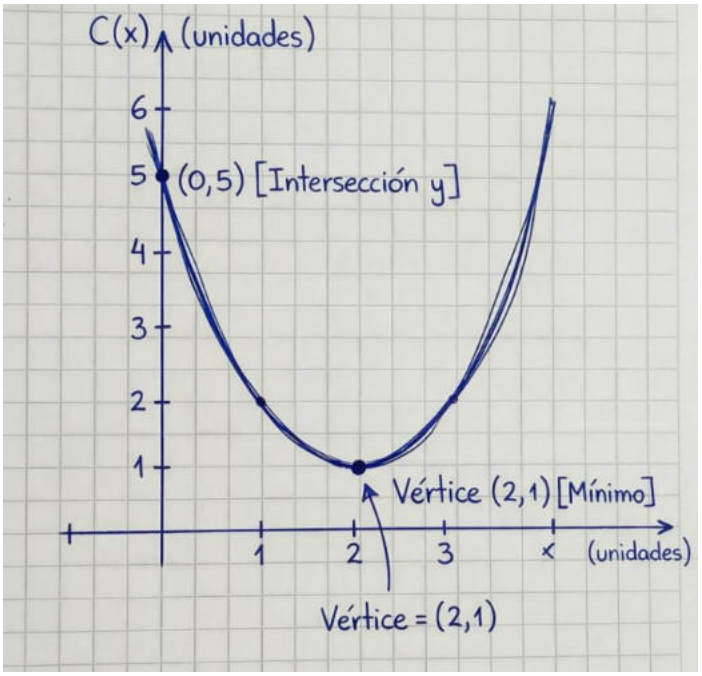


Figura 19. Gráfica manual de ejemplo 6.

Fuente: Elaboración propia.

7. Se verifica que la gráfica corresponde fielmente a los datos de la tabla de comportamiento

La representación gráfica obtenida manualmente, así como el análisis teórico realizado, se valida mediante la graficación en Google Colab. La codificación utilizada consta en la Figura 20 y la explicación de cada una de sus líneas se ha sintetizado en la Tabla 13.

La grafica resultante dada por Google Colab (Ver Figura 21), confirma que la graficación manual y el análisis teórico realizados son correctos.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

y = x**2 - 4*x + 5

plt.figure(figsize=(8, 6)) # Optional: set figure size for better aspect ratio

plt.plot(x, y)
plt.title("Gráfica de y = x^2-4x+5")
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.grid(True, linestyle='--', alpha=0.7) # Enhance grid

# Adjust limits to meet user requirements
plt.xlim([0, 5]) # Updated x-axis interval
plt.ylim([0, 6]) # Updated y-axis interval

# Add x and y axes at 0,0 for better reference
plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.8, linestyle='-')
plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.8, linestyle='-')

plt.show()
```

Figura 20. Codificación de ejemplo 6.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 13. Detalle de codificación de ejemplo 6.

Código	Qué hace
import numpy as np	Importa la librería NumPy y la abrevia como np.
import matplotlib.pyplot as plt	Importa la librería Matplotlib y la abrevia como plt.
*y = x**2 - 4*x + 5*	Define la función matemática $y=x^2-4x+5$, calculando los valores correspondientes de Y.
plt.figure(figsize=(8, 6))	Crea una figura para la gráfica con tamaño de 8x6 pulgadas, mejorando su visualización.

plt.plot(x, y)	Dibuja la gráfica de la función usando los valores de X y Y.
plt.title("Gráfica de y = x^2-4x+5")	Asigna un título a la gráfica.
plt.xlabel("x")	Etiqueta el eje horizontal (eje X).
plt.ylabel("y")	Etiqueta el eje vertical (eje Y).
plt.grid(True,linestyle='--', alpha=0.7)	Activa la cuadrícula en la gráfica, con líneas punteadas y transparencia.
plt.xlim([0, 5])	Define el rango visible del eje X entre 0 y 5.
plt.ylim([0, 6])	Define el rango visible del eje Y entre 0 y 6.
plt.axhline(0,color='black', linewidth=0.8, linestyle='--')	Dibuja una línea horizontal en el eje Y=0 (eje X).
plt.axvline(0,color='black', linewidth=0.8, linestyle='--')	Dibuja una línea vertical en el eje X=0 (eje Y).
plt.show()	Muestra en pantalla la gráfica que se ha creado previamente.

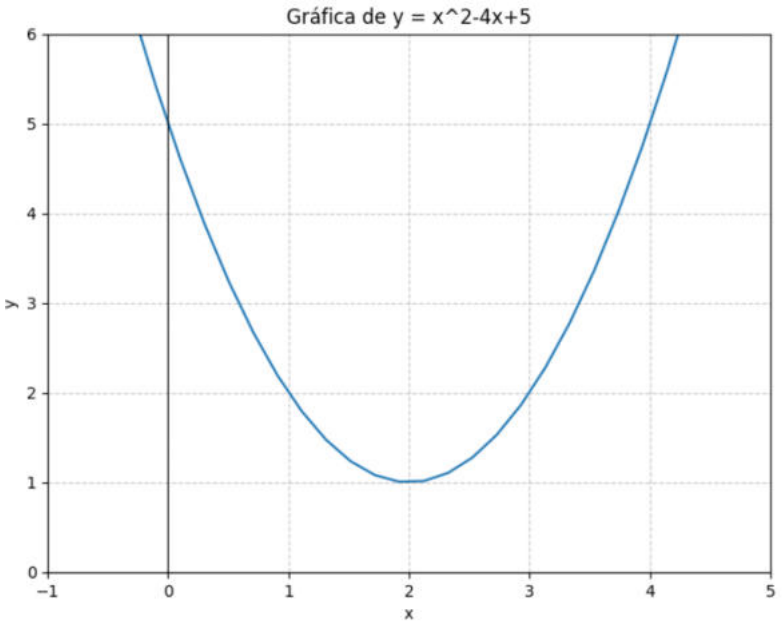


Figura 21. Grafica en Google Colab de función de ejercicio 6.

Fuente: Elaboración propia.

3.4.2 Ejemplo 7

En el análisis de algoritmos, el rendimiento puede variar dependiendo del tamaño de entrada de los datos. Se propone el siguiente modelo dado por la función:

$$R(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

donde:

x: tamaño de entrada (en miles de datos)

$R(x)$: rendimiento del algoritmo (unidades relativas)

Paso 1: Determinar el dominio

La función $R(x)$ es un polinomio de grado 3, por lo tanto:

- Está definida para todos los números reales
- No presenta restricciones algebraicas como: divisiones entre cero, raíces pares, logaritmos.

Por ello, su dominio es:

$$Dom(R) = \mathbf{R}$$

En el contexto de TI no existe tamaño de entrada negativo, o sea el dominio real es:

$$Dom(R) = [0, \infty)$$

Paso 2: Calcular la primera derivada

$$R'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

Paso 3: Encontrar puntos críticos

$$R'(x) = 0$$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$3(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-3)(x-1) = 0$$

$$x - 3 = 0$$
$$x = 3$$

$$x - 1 = 0$$
$$x = 1$$

Los puntos críticos son: $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$

Paso 4: Analizar crecimiento/decrecimiento

$Si\ x < 1 \Rightarrow R'(x) > 0 \rightarrow$ creciente

$Si\ 1 < x < 3 \Rightarrow R'(x) < 0 \rightarrow$ decreciente

$Si\ x > 3 \Rightarrow R'(x) > 0 \rightarrow$ creciente

Paso 5: Calcular la segunda derivada

$$R''(x) = 6x - 12$$

Paso 6: Determinar concavidad

$Si\ x = 1 \Rightarrow R''(x) < 0 \rightarrow$ Cóncava hacia abajo

$Si\ x = 3 \Rightarrow R''(x) > 0 \rightarrow$ Cóncava hacia arriba

Paso 7: Identificar puntos de inflexión

$$R''(x) = 0$$

$$6x - 12 = 0$$

$$x = \frac{12}{6}$$

El punto de inflexión es $x = 2$

Paso 8: Construir tabla de comportamiento

Tabla 14. Tabla de comportamiento de ejemplo 7.

Intervalo / Punto	**Valor de *x***	***R*(*x*)**	**Signo *R′*(x)**	**Signo *R″*(x)**	**Concavidad**	**Comportamiento**	**Interpretación TI**
Intervalo	$0 < x < 1$	-	Positivo	-	Hacia abajo	Creciente	Mejora rendimiento
Punto crítico	$x = 1$	4	0	Negativo	Hacia abajo	Máximo local	Máximo rendimiento
Intervalo	$1 < x < 2$	-	Negativo	-	Hacia abajo	Decreciente	Disminuye rendimiento
Punto crítico	$x = 2$	2	-	0	Cambio	Punto de Inflexión	Cambio en la dinámica del sistema

Intervalo	$2<x<3$	-	Negativo	-	Hacia arriba	Decreciente	Decrecimiento desacelerado
Punto crítico	$x=3$	0	-	Positivo	Hacia arriba	Mínimo local	Peor rendimiento del sistema.
Intervalo	$x>3$	-	Positivo	-	Hacia arriba	Creciente	El rendimiento vuelve a mejorar.

Paso 9: Realizar la gráfica

1. Se traza el sistema de ejes coordenados, se recomienda emplear la siguiente escala:

- Eje x:

1 unidad = 1 cm

Intervalo recomendado: de 0 a 4

- Eje y:

1 unidad = 0,5 cm

Intervalo recomendado: de 0 a 5

2. Se identifican y ubican los puntos relevantes obtenidos del análisis:

- Intersección con el eje y: (0,0)
- Máximo local: (1,4)

- Punto de inflexión:(2,2)
- Mínimo local: (3,0)

3. Se divide el dominio en los siguientes intervalos utilizando como limites los puntos críticos e inflexión. Los mismos que permiten analizar el comportamiento de la función en cada región.

- $0< x < 1$
- $1< x <2$
- $2< x <3$
- $x >3$

4. Se dibujan flechas suaves sobre cada intervalo indicando la dirección de la curva (creciente o decreciente).

- En $0< x < 1$: la función es creciente.
- En $1< x <2$: la función es decreciente
- En $2< x <3$: la función es decreciente
- En $x >3$: la función es creciente.

5. Se incorpora la concavidad para definir la forma de la curva.

De acuerdo con en el signo de la segunda derivada $R''(x)$:

En $x = 1$: la función es cóncava hacia abajo

En $x = 3$: la función es cóncava hacia arriba

Acorde con x=2, que es un punto de inflexión, donde cambia la concavidad.

6. Se unen los puntos clave mediante una curva continua y suave, considerando que la gráfica:

- Parte desde (0,0) y crece cóncava hacia abajo hasta el máximo en (1,4).
- Luego decrece y continua cóncava hacia abajo hasta llegar al punto de inflexión (2,2).
- Después del punto de inflexión sigue decreciendo hasta el mínimo en (3,0), pero cóncava hacia arriba.
- A partir de (3,0) vuelve a crecer, con concavidad hacia arriba.

La grafica obtenida se visualiza en la Figura 22.

7. Se verifica que la gráfica está acorde a los datos de la tabla de comportamiento.

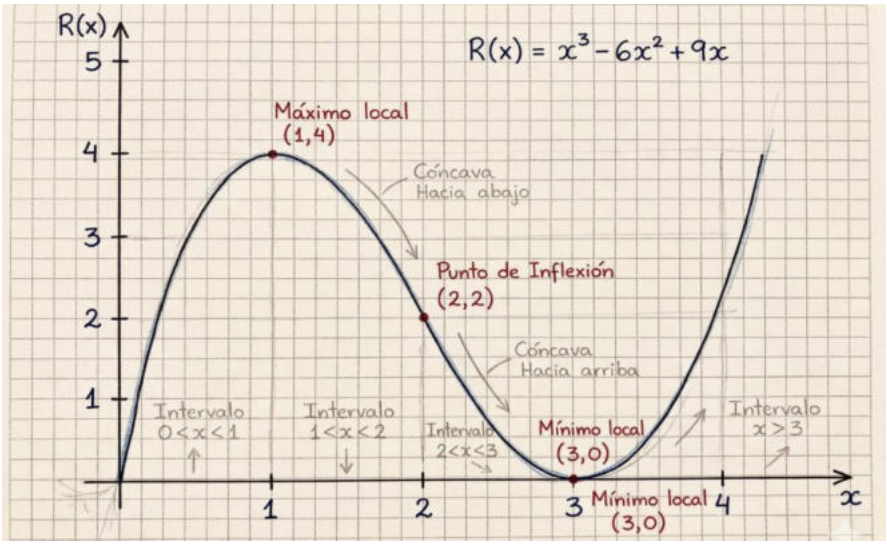


Figura 22. Gráfica manual de ejemplo 7.

Fuente: Elaboración propia.

Al realizar la graficación en Google Colab, se emplea el código mostrado en la Figura 23.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Definición de la función a graficar
# Ajustado el rango de x según el intervalo recomendado
x = np.linspace(0, 4, 400)
y = x**3 - 6*x**2 + 9*x

plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.plot(x, y, label='y = x³ - 6x² + 9x')
plt.title('Gráfica de la Curva y = x³ - 6x² + 9x')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.grid(True, linestyle='--', alpha=0.7)

# Ajuste de los límites de los ejes según lo solicitado
plt.xlim([0, 4]) # Intervalo recomendado para el eje x
plt.ylim([0, 5]) # Intervalo recomendado para el eje y

plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.8, linestyle='-')
plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.8, linestyle='-')
plt.legend()
plt.show()
```

Figura 23. Codificación de ejemplo 7.

Fuente: Elaboración propia.

Como resultado, se obtiene la gráfica presentada en la Figura 24, lo que confirma que el bosquejo realizado manualmente es correcto.

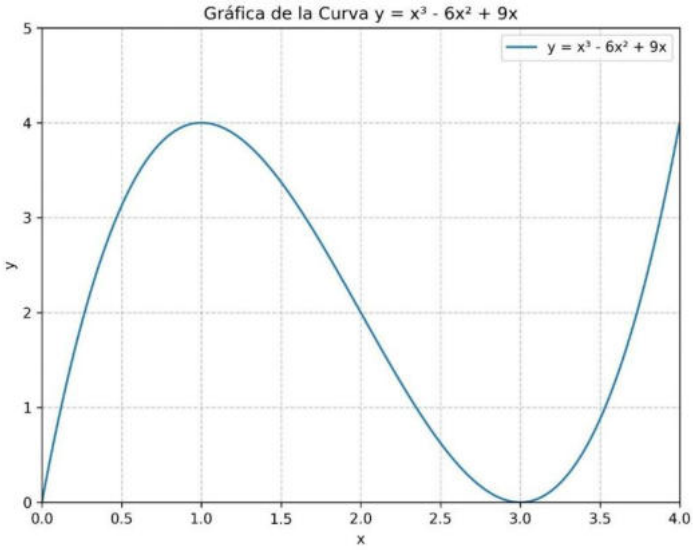


Figura 24. Grafica en Google Colab de función de ejemplo 7.

Fuente: Elaboración propia.

3.4.3 Ejemplo 8

El tráfico en una red suele variar de forma periódica. Este comportamiento puede modelarse mediante la función:

$$T(x) = 50 + 30sen(\frac{\pi}{12}(x-6))$$

Donde:

- x: hora del día
- $T(x)$: tráfico de red (Mbps)

Paso 1: Determinar el dominio

Como un día completo tiene 24 horas, el dominio es:

$$Dom(T) = [0, 24]$$

Paso 2: Calcular la primera derivada

$$T'(x) = 0 + 30\cos(\frac{\pi}{12}(x-6))\frac{d}{dx}(\frac{\pi}{12}(x-6))$$

$$T'(x) = 30\cos(\frac{\pi}{12}(x-6))\frac{\pi}{12}\frac{d}{dx}(x-6)$$

$$T'(x) = 30\frac{\pi}{12}\cos(\frac{\pi}{12}(x-6))(1-0)$$

$$T'(x) = \frac{5\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{12}(x-6))$$

Paso 3: Encontrar puntos críticos

$$T'(x) = 0$$

$$\frac{5\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{12}(x-6)) = 0$$

$$\frac{\pi}{12}(x-6) = \frac{\pi}{2}$$

$$x - 6 = 6$$
$$x_1 = 12$$

$$\frac{\pi}{12}(x-6)=\frac{3\pi}{2}$$

$$x-6=18$$
$$x_2=24$$

Los puntos críticos son: x = 12, x = 24

Paso 4: Analizar crecimiento/decrecimiento

$Si\ 0<x<12 \Rightarrow T'(x)>0 \rightarrow$ creciente

$Si\ 12<x<24 \Rightarrow T'(x)<0 \rightarrow$ decreciente

Paso 5: Calcular la segunda derivada

$$T''(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{5\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{12}(x-6))\right]$$

$$T''(x)=\frac{5\pi}{2}\frac{d}{dx}\left[\cos(\frac{\pi}{12}(x-6))\right]$$

$$T''(x)=\frac{5\pi}{2}\left[-sen(\frac{\pi}{12}(x-6))\frac{d}{dx}(\frac{\pi}{12}(x-6))\right]$$

$$T''(x)=\frac{5\pi}{2}\frac{\pi}{12}\left[-sen(\frac{\pi}{12}(x-6))(1-0)\right]$$

$$T''(x)=\frac{5\pi^2}{24}\left[-sen(\frac{\pi}{12}(x-6))\right]$$

$$T''(x) = -\frac{5\pi^2}{24} sen(\frac{\pi}{12}(x-6))$$

Paso 6: Determinar concavidad

De acuerdo con en el signo de la segunda derivada T''(x):

En x = 12: la función es cóncava hacia abajo

En x = 24: la función es cóncava hacia arriba

Paso 7: Identificar puntos de inflexión

$$T''(x) = 0$$

$$-\frac{5\pi^2}{24} sen(\frac{\pi}{12}(x-6)) = 0$$

$$sen(\frac{\pi}{12}(x-6)) = 0$$

$$\frac{\pi}{12}(x-6) = 0$$

$$x-6=0$$
$$x_1 = 6$$

$$\frac{\pi}{12}(x-6) = \pi$$

$$x-6=12$$
$$x_2 = 18$$

Los puntos de inflexión son: x = 6, x = 18

Paso 8: Construir tabla de comportamiento

Tabla 15. Tabla de comportamiento de ejemplo 8.

Intervalo / Punto	Valor de x	$R(x)$	Signo $R'(x)$	Signo $R''(x)$	Concavidad	Comportamiento	Interpretación TI
Intervalo	$0 < x < 6$	-	Positivo	Positivo	Hacia arriba	Creciente	El tráfico crece
Punto crítico	$x = 6$	50	Positivo	0	Cambio	Punto de Inflexión	Cambio en la dinámica del tráfico.
Intervalo	$6 < x < 12$	-	Positivo	Negativo	Hacia abajo	Creciente	Crecimiento intensivo del tráfico
Punto crítico	$x = 12$	80	0	Negativo	Hacia abajo	Máximo local	Máxima carga
Intervalo	$12 < x < 18$	-	Negativo	Negativo	Hacia abajo	Decreciente	Decrecimiento controlado
Punto crítico	$x = 18$	50	Negativo	0	Cambio	Punto de Inflexión	Cambio en la dinámica del tráfico.

Intervalo	$18 < x < 24$	-	Negativo	Positivo	Hacia arriba	Decreciente	Decrecimiento sostenido
Punto crítico	$x = 24$	20	0	Positivo	Hacia arriba	Mínimo local	Mínima carga

Paso 9: Realizar la gráfica

Siguiendo un proceso semejante al de los ejercicios 6 y 7 se obtiene el bosquejo manual de la función (Ver Figura 25).

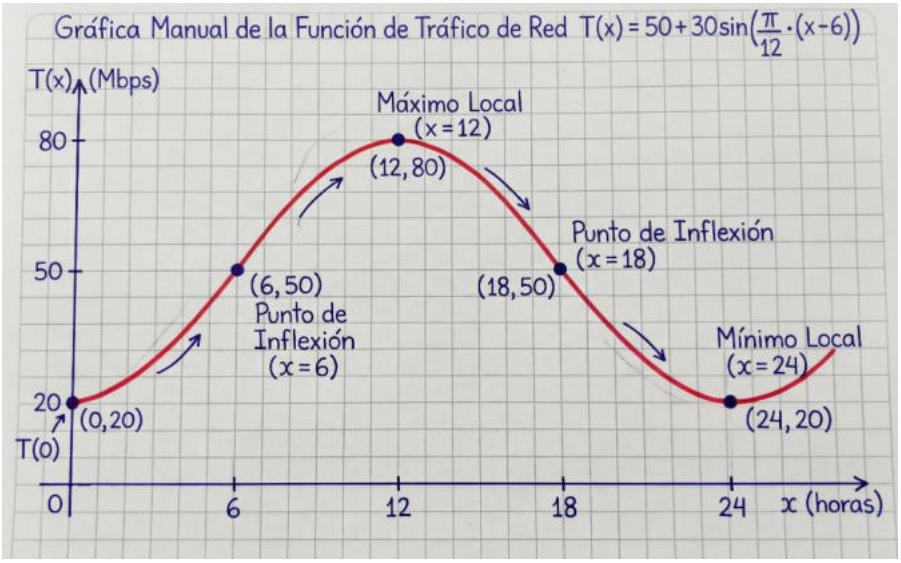


Figura 25. Gráfica manual de ejemplo 7.

Fuente: Elaboración propia.

Al realizar la graficación en Google Colab, se utiliza la codificación que consta en la Figura 26, obteniéndose la gráfica dada en la Figura 27.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def T(x):
    return 50 + 30 * np.sin((np.pi/12) * (x - 6))

x = np.linspace(0, 24, 400)
y = T(x)

plt.figure()
plt.plot(x, y)

# Puntos clave
points_x = [0, 6, 12, 18, 24]
points_y = [T(px) for px in points_x]

plt.scatter(points_x, points_y)

# Etiquetas
labels = [
    "(0,20)",
    "Inflexión\n(6,50)",
    "Máximo\n(12,80)",
    "Inflexión\n(18,50)",
    "Mínimo\n(24,20)"
]

for i in range(len(points_x)):
    plt.text(points_x[i], points_y[i], labels[i])

plt.xlabel("x (horas)")
plt.ylabel("T(x) (Mbps)")
plt.title("Tráfico de Red")
plt.grid()

plt.show()
```

Figura 26. Codificación de ejemplo 8.

Fuente: Elaboración propia.

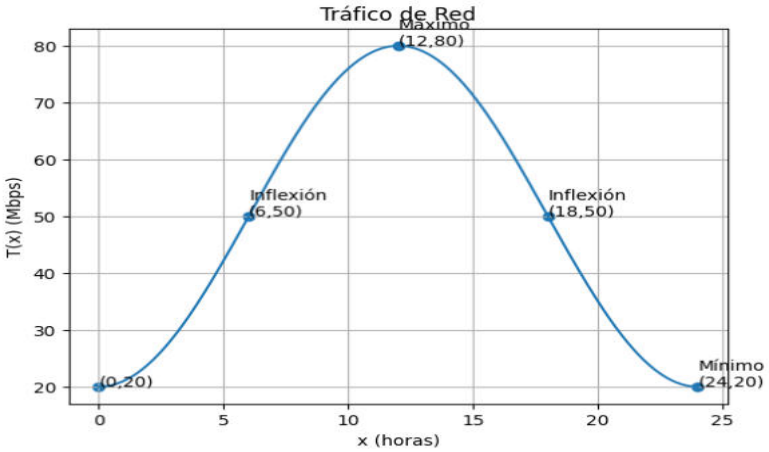


Figura 27. Grafica en Google Colab de función de ejemplo 8.

Fuente: Elaboración propia.

3.5 Piensa y analiza

Escenario:

Un sistema de almacenamiento en la nube presenta un comportamiento en el uso de memoria (en GB) en función del número de procesos activos, modelado por la función:

$$M(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$$

Donde:

- x: número de procesos (en cientos)
- $M(x)$: uso de memoria (GB)

Actividad

Aplicar el procedimiento sistemático desarrollado en los ejemplos del capítulo para analizar y graficar la función $M(x)$:

Paso 1: Determinar el dominio

Paso 2: Calcular la primera derivada

Paso 3: Encontrar puntos críticos

Paso 4: Analizar crecimiento/decrecimiento

Paso 5: Calcular la segunda derivada

Paso 6: Determinar concavidad

Paso 7: Identificar puntos de inflexión

Paso 8: Construir tabla de comportamiento

Paso 9: Realizar la gráfica

Preguntas para reflexionar y analizar:

1. ¿En qué valor de x el sistema alcanza su máximo uso de memoria?
2. ¿Existe un punto donde el sistema opera de manera más eficiente?
3. ¿Qué representa el punto de inflexión en términos del comportamiento del sistema?

4. ¿A partir de qué valor de x el sistema podría volverse ineficiente o inestable?

3.6 Autoevalúate

Escoge el literal de la respuesta correcta a las siguientes interrogantes:

1. El dominio de una función corresponde a:

a) Los valores donde la derivada es cero

b) Los valores para los cuales la función está definida

c) Los valores donde la función es creciente

d) Los puntos críticos

2. La tabla de comportamiento permite:

a) Organizar la información del análisis de la función

b) Calcular derivadas

c) Resolver ecuaciones

d) Eliminar puntos críticos

3. La construcción manual de la gráfica es importante porque:

a) Reemplaza el uso de software

b) Permite comprender el comportamiento de la función

c) Evita calcular derivadas

d) Simplifica el dominio

4. En el análisis de sistemas en TI, un máximo local puede representar:

a) Un error del sistema

b) Un punto de menor rendimiento

c) Un punto de sobrecarga o saturación

d) Un valor sin importancia

5. Un punto de inflexión en un sistema computacional puede indicar:

a) Un valor constante

b) Un cambio en la tendencia del sistema

c) Un error en los datos

d) Un cambio en la tendencia del sistema

6. Si la segunda derivada es igual a cero, entonces:

a) Siempre hay un punto de inflexión

b) Siempre hay un máximo

c) Puede existir un punto de inflexión si hay cambio de signo

d) La función no está definida

7. En la construcción de la gráfica, los puntos críticos sirven para:

a) Determinar la escala

b) Ubicar máximos y mínimos

c) Calcular el dominio

d) Eliminar intervalos

8. En un modelo de rendimiento, un mínimo local puede representar:

a) El mejor rendimiento

b) Un punto sin significado

c) El peor rendimiento del sistema

d) Un error matemático

9. La validación con herramientas como Python o Google Colab permite:

a) Sustituir completamente el análisis matemático

b) Confirmar la gráfica manual y los resultados obtenidos analíticamente

c) Evitar el uso de derivadas

d) Cambiar la función original

10. En el contexto de TI, analizar una gráfica permite:

a) Evitar el uso de modelos matemáticos

b) Simplificar la programación

c) Eliminar datos innecesarios

d) Interpretar el comportamiento del sistema

Respuestas: 1-b, 2-a, 3-b, 4-c, 5-d, 6-c, 7-b, 8-c, 9-b, 10-d

CAPÍTULO IV

4 OPTIMIZACIÓN EN TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN MEDIANTE EXPERIMENTACIÓN EN GOOGLE COLAB

4.1 Introducción

En el ámbito de las tecnologías de la información, la optimización constituye una herramienta fundamental para la toma de decisiones técnicas orientadas a mejorar el rendimiento, reducir costos y aumentar la eficiencia de sistemas informáticos. En el campo profesional, el futuro ingeniero en TI se va a enfrentar a problemas como la saturación de servidores, la congestión en redes, el ajuste de parámetros en algoritmos, la asignación de recursos en ciberseguridad o la reducción del consumo energético en infraestructura tecnológica. La solución de estos desafíos requiere no solo intuición técnica, sino también un análisis cuantitativo fundamentado matemáticamente.

Los conceptos abordados en los capítulos anteriores corresponden a los fundamentos del análisis de funciones y al cálculo de máximos y mínimos mediante la derivada. De este modo, el estudiante ha recibido el marco teórico necesario para identificar puntos críticos y determinar condiciones óptimas. Este capítulo, se concreta a su aplicación en el contexto de las tecnologías de la información, priorizando la interpretación operativa por encima del formalismo matemático.

Por ello, la solución a las problemáticas propuestas, no se limita a la obtención de los máximos y mínimos desde una perspectiva abstracta; implica determinar configuraciones de operación que equilibren variables como rendimiento, estabilidad, costo y eficiencia energética. De esta manera, el análisis matemático se integra con la experimentación computacional para validar modelos y simular escenarios reales.

En este sentido, Google Colab se adopta como entorno de trabajo para la implementación práctica de modelos de optimización mediante Python. El uso de bibliotecas como SymPy, NumPy y Matplotlib le permite al estudiante derivar funciones, realizar cálculos numéricos y visualizar resultados de manera estructurada y reproducible. Esta integración fortalece el vínculo entre teoría y práctica, acorde con el perfil profesional del futuro ingeniero en Tecnologías de la Información.

Por tanto, el presente capítulo propone un enfoque aplicado de la optimización diferencial, orientado a la resolución de problemas reales del entorno tecnológico, mediante modelado funcional, simulación computacional y análisis crítico de resultados.

El modelado matemático constituye una competencia transversal en tecnologías de la información. Permite transformar situaciones complejas como congestión de redes, optimización de servidores o análisis de algoritmos, en estructuras formales que pueden analizarse rigurosamente.

En la práctica profesional, quienes saben modelar pueden anticipar fallos, optimizar recursos y diseñar soluciones escalables. Por ello, el paso del problema tecnológico al modelo matemático no es solo un procedimiento académico, sino una habilidad esencial en la ingeniería y las ciencias computacionales contemporáneas.

4.2 Del Problema Tecnológico al Modelo Matemático

4.2.1 Problema tecnológico

Según National Academy of Engineering and National Research Council (2009), un problema tecnológico es una situación en la que un sistema informático, una red, un algoritmo o una infraestructura digital no cumple de manera óptima con los objetivos deseados, o requiere diseño y planificación para funcionar eficientemente.

Algunos ejemplos típicos de problemas tecnológicos son:

- Congestión en una red.
- Uso ineficiente de recursos en un servidor.
- Tiempo de ejecución elevado de un algoritmo.
- Crecimiento acelerado del almacenamiento requerido.
- Vulnerabilidades en sistemas de seguridad informática.

Estos problemas comparten tres características:

1. Involucran variables cuantificables.
2. Poseen restricciones técnicas o físicas.

3. Requieren optimización o predicción.

4.2.2 Modelo matemático

La mayoría de los desafíos profesionales, en el contexto de las Tecnologías de la Información, no se resuelven únicamente con programación o configuración de sistemas, sino mediante un proceso estructurado de análisis. Este proceso implica transformar un problema tecnológico real en una representación formal que permita comprenderlo, predecir su comportamiento y optimizar soluciones. Esa representación formal es lo que se denomina un modelo matemático.

Modelar matemáticamente no significa complicar un problema, sino abstraerlo adecuadamente, identificando sus elementos esenciales y expresándolos mediante variables, relaciones y restricciones. Según Hillier y Lieberman (2021), un modelo matemático es una representación cuantitativa de un sistema real, diseñado para analizar su comportamiento y apoyar la toma de decisiones. En el contexto de TI, esta capacidad es fundamental para diseñar redes, optimizar servidores, evaluar algoritmos y gestionar grandes volúmenes de datos.

4.2.3 Proceso de transición del problema tecnológico al modelo matemático



Figura 28. Proceso de transición del problema tecnológico al modelo matemático.

Fuente: Elaboración propia.

El tránsito del problema tecnológico al modelo matemático, esquematizado en la Figura 28, puede sintetizarse en las siguientes etapas:

1. Descripción clara del problema real

Este paso consiste en definir con precisión la situación tecnológica que se desea analizar o resolver. Implica delimitar el sistema, identificar su objetivo y especificar el contexto operativo, ya que una definición ambigua conduce a modelos incorrectos.

La formulación del problema es considerada la etapa más crítica del proceso de modelado (Hillier & Lieberman, 2021). En el ámbito computacional, una descripción formal del problema permite establecer criterios medibles de desempeño (Cormen et al., 2022). Por ejemplo: Reducir el tiempo de respuesta de un servidor web bajo alta demanda.

2. Identificación de variables y parámetros

Una vez definido el problema, se distinguen:

- Variables: cantidades que pueden cambiar o que se desean determinar.
- Parámetros: valores conocidos o constantes del sistema.

La correcta identificación de estos elementos permite estructurar el modelo matemático y determina la coherencia del mismo. Según Cormen et al. (2022), la formalización de variables es esencial para analizar el comportamiento de sistemas algorítmicos. Por ejemplo, en redes:

- Variable: x = número de solicitudes por segundo.
- Parámetro: C = capacidad máxima del servidor.

3. Definición de restricciones

Las restricciones representan las limitaciones técnicas, físicas o económicas del sistema. Se expresan generalmente mediante ecuaciones o inecuaciones.

En optimización, las restricciones delimitan el espacio de soluciones factibles (Hillier & Lieberman, 2021). Por ejemplo:

$$x \leq C$$

Esto indica que el número de solicitudes no puede superar la capacidad del servidor.

Sin restricciones, el modelo no representa adecuadamente la realidad tecnológica.

4. Establecimiento de supuestos

Todo modelo implica simplificaciones. Los supuestos permiten reducir la complejidad del sistema real para hacerlo analizable.

En modelado de redes, por ejemplo, suele asumirse que la tasa de llegada de paquetes es constante o que no existen fallos en la transmisión (Kurose & Ross, 2021).

Los supuestos deben declararse explícitamente porque determinan el alcance y la validez del modelo. Un modelo con supuestos irreales produce conclusiones poco confiables.

5. Formulación matemática

En esta etapa se traducen las relaciones del sistema al lenguaje matemático: funciones, ecuaciones, sistemas o modelos probabilísticos. Por ejemplo, en teoría básica de colas:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Donde:

$\lambda =$ tasa de llegada

$\mu =$ tasa de servicio

Si $\rho < 1$, el sistema es estable, si $\rho \geq 1$, existe congestión (Kurose & Ross, 2021).

6. Resolución del modelo

Una vez formulado, el modelo se resuelve mediante herramientas matemáticas o computacionales: álgebra, cálculo, métodos numéricos o simulaciones. En TI, esta fase puede incluir simulaciones en software, análisis de complejidad o pruebas de rendimiento.

7. Validación e interpretación

La validación consiste en verificar si el modelo representa adecuadamente el sistema real, lo cual puede hacerse comparando resultados con datos empíricos o mediante pruebas experimentales.

En ingeniería de software y sistemas, la verificación y validación son procesos formales documentados en estándares técnicos del Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE, 2022).

Un modelo válido debe:

- Predecir resultados coherentes.
- Ajustarse a datos observables.
- Mantener consistencia lógica.

Finalmente, los resultados matemáticos deben traducirse nuevamente al contexto tecnológico. Por ejemplo: Si el modelo indica que la utilización del servidor es 95%, se anticipa congestión.

El modelo no sustituye el juicio profesional, pero fundamenta decisiones técnicas con base cuantitativa (Hillier & Lieberman, 2021).

4.3 Tipos de funciones utilizadas en el modelado de sistemas informáticos

En muchos problemas de optimización iniciales, se utilizan funciones cuadráticas porque permiten identificar máximos o mínimos de manera directa. Sin embargo, en aplicaciones reales de Tecnologías de la Información pueden aparecer modelos más complejos, como funciones exponenciales, logarítmicas o polinomios de mayor grado, como se sintetiza en la Tabla 16.

Tabla 16. Tipos de funciones utilizadas en modelado en sistemas TI.

Tipo de función	Forma general	Aplicación en TI	Comportamiento
Lineal	$f(x) = ax + b$	Crecimiento simple del uso de recursos	Crecimiento constante

Cuadrática	$f(x) = ax^2 + bx + c$	Problemas de optimización de rendimiento	Presenta máximos o mínimos
Exponencial	$f(x) = ae^{kx}$	Crecimiento de datos o usuarios	Crecimiento acelerado
Logarítmica	$f(x) = a \log x$	Análisis de algoritmos y búsquedas	Crecimiento lento
Racional	$f(x) = \frac{a}{b - x}$	Teoría de colas y congestión de redes	Crecimiento abrupto cerca del límite

4.4 Optimización usando Google Colab

Actualmente, el uso de herramientas computacionales facilita el aprendizaje y la aplicación práctica de estos métodos. Una de las plataformas más utilizadas en educación y desarrollo científico es Google Colab, un entorno en línea que permite ejecutar código en Python directamente desde el navegador sin necesidad de instalar software adicional. Gracias a esta herramienta, los estudiantes pueden experimentar con algoritmos de optimización utilizando bibliotecas

científicas ampliamente utilizadas en la comunidad académica (Bisong, 2019).

Google Colab (Colaboratory) es un servicio gratuito basado en la nube que permite ejecutar cuadernos interactivos de Python similares a los de Jupyter Notebook. Este entorno combina texto explicativo, ecuaciones matemáticas y código ejecutable dentro de un mismo documento.

Las principales características de Google Colab incluyen:

- Ejecución de Python sin instalación local.
- Integración con bibliotecas científicas como **NumPy**, que facilita el cálculo numérico eficiente mediante arreglos multidimensionales (Harris et al., 2020); **SciPy**, que ofrece algoritmos para optimización, integración y álgebra lineal (Virtanen et al., 2020); y **SymPy**, que permite realizar cálculos simbólicos y manipulación algebraica (Meurer et al., 2017).
- Almacenamiento automático en Google Drive.
- Posibilidad de compartir notebooks para trabajo colaborativo.
- Acceso a recursos computacionales en la nube.

El uso de Google Colab presenta las siguientes ventajas para aprender y aplicar métodos de optimización:

1. Acceso inmediato a herramientas científicas

Las bibliotecas más importantes para computación científica ya están instaladas, lo que permite aplicar algoritmos de optimización desde el primer momento (Virtanen et al., 2020).

2. Entorno interactivo

Los estudiantes pueden ejecutar código paso a paso, modificar parámetros y observar cómo cambian los resultados de los algoritmos de optimización.

3. Integración con documentación y visualización

En el mismo cuaderno es posible incluir explicaciones teóricas, gráficos y resultados experimentales.

4. Facilidad para compartir y reproducir experimentos

Los notebooks pueden compartirse mediante enlaces, facilitando el trabajo colaborativo y la reproducibilidad científica (Bisong, 2019).

4.5 Pasos para resolver problemas mediante técnicas de optimización basadas en el estudio de máximos y mínimos, implementadas en Google Colab

1. Planteamiento del problema en contexto tecnológico

Describir la situación real relacionada con el rendimiento del servidor (por ejemplo, tiempo de respuesta, número de solicitudes, uso de CPU o tráfico de red).

2. **Definición de la variable de decisión (de ser necesario)**

Establecer la variable independiente que representa el elemento a optimizar (por ejemplo, número de solicitudes por segundo).

3. **Formulación del modelo matemático (de ser necesario)**

Construir la función matemática que describe el comportamiento del sistema (por ejemplo, una función que relacione el tiempo de respuesta con la cantidad de solicitudes).

4. **Cálculo de la primera derivada de la función**

Derivar la función para analizar cómo cambia el rendimiento del servidor respecto a la variable definida.

5. **Determinación de los puntos críticos**

Igualar la primera derivada a cero y resolver la ecuación para encontrar los valores donde puede existir un máximo o mínimo.

6. **Aplicación del criterio de la segunda derivada**

Calcular la segunda derivada para verificar si el punto crítico corresponde a un máximo o a un mínimo.

7. **Cálculo del valor óptimo de la función**

Sustituir el valor obtenido en la función original para determinar el valor máximo o mínimo del problema.

8. Interpretación del resultado en el contexto del problema

Explicar el significado del resultado en términos del rendimiento del servidor o del sistema informático.

9. Implementación computacional en Google Colab

Utilizar herramientas de programación (por ejemplo, Python con bibliotecas como SymPy, NumPy o Matplotlib) para calcular derivadas, resolver ecuaciones y visualizar la función.

10. Conclusión técnica del análisis

Resumir cómo el método de optimización permite mejorar el rendimiento del sistema tecnológico analizado.

Los pasos 2 y 3 se aplicarán únicamente cuando el modelo matemático no haya sido proporcionado.

A continuación, se abordarán situaciones problémicas contextualizadas en el ámbito de las Tecnologías de la Información, las cuales serán analizadas y resueltas mediante esta metodología propuesta. Para ello, se ha considerado que, en problemas de optimización relacionados con sistemas informáticos, generalmente se busca minimizar variables como tiempo de respuesta, tiempo de procesamiento o consumo energético.

4.5.1 Ejemplo 9: Optimización del Rendimiento de Servidores

1. Planteamiento del problema en contexto tecnológico



Figura 29. Procesamiento de solicitudes en un servidor web.

Fuente: Elaboración propia.

En un servidor web que procesa solicitudes de usuarios (Ver Figura 29), se ha observado que el tiempo de respuesta del servidor, medido en milisegundos (ms), depende del número de solicitudes procesadas por segundo.

Las mediciones del sistema indican que:

- El tiempo base de respuesta del servidor es 60 ms, correspondiente al funcionamiento normal del sistema cuando no existe carga significativa.
- Al inicio, cuando el número de solicitudes aumenta, el sistema aprovecha mecanismos de optimización y uso eficiente de caché, lo que reduce el tiempo de respuesta en aproximadamente 1.2 ms por cada solicitud adicional.

- Sin embargo, cuando la carga continúa aumentando, la saturación de recursos del servidor provoca un incremento del tiempo de respuesta, modelado mediante un término cuadrático de 0.02 ms por solicitud al cuadrado.

Se desea determinar cuántas solicitudes por segundo minimizan el tiempo de respuesta del servidor.

2. Definición de la variable de decisión

x = número de solicitudes procesadas por segundo

3. Formulación del modelo matemático

El tiempo total de respuesta del servidor ($T(x)$) está compuesto por:

- Tiempo base: 60
- Decremento lineal por carga: -1.2x
- Incremento cuadrático: 0.02x^2

Por lo tanto, la función que modela el tiempo de respuesta es:

$$T(x) = 60 - 1.2x + 0.02x^2$$

4. Cálculo de la primera derivada de la función

Se deriva la función respecto a x:

$$T'(x) = \frac{d}{dx}(60 - 1.2x + 0.02x^2)$$

$$T'(x) = -1.2 + 0.04x$$

5. Determinación de los puntos críticos

Se iguala la primera derivada a cero:

$$-1.2 + 0.04x = 0$$

Se resuelve:

$$0.04x = 1.2$$

$$x = \frac{1.2}{0.04}$$

El valor crítico es:

$$x = 30$$

6. Aplicación del criterio de la segunda derivada

Se calcula la segunda derivada:

$$T''(x) = \frac{d}{dx}(-1.2 + 0.04x)$$

$$T''(x) = 0.04$$

Como: $T''(x) > 0$

La función es cóncava hacia arriba y, por tanto, tiene un mínimo en $x = 30$.

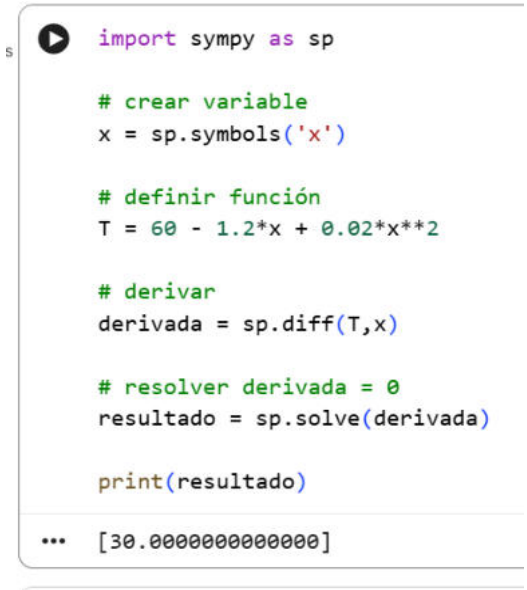
7. Cálculo del valor óptimo de la función

$$T(30) = 60 - 1.2(30) + 0.02(30^2)$$
$$T(30) = 60 - 36 + 18$$
$$T(30) = 42$$

8. Interpretación del resultado en el contexto del problema

El servidor alcanza su mejor rendimiento cuando procesa 30 solicitudes por segundo, porque ahí alcanza su tiempo mínimo de respuesta.

9. Implementación computacional en Google Colab



```
import sympy as sp

# crear variable
x = sp.symbols('x')

# definir función
T = 60 - 1.2*x + 0.02*x**2

# derivar
derivada = sp.diff(T,x)

# resolver derivada = 0
resultado = sp.solve(derivada)

print(resultado)
```

```
[30.0000000000000]
```

Figura 30. Codificación para ejemplo 9 en Google Colab.

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 30 consta la codificación utilizada en Google Colab, que se detalla a continuación en la Tabla 17.

Tabla 17. Detalle de codificación de ejemplo 9.

Paso	**Código**	**Qué hace**	**Concepto clave**
1	*import sympy as sp*	Importa la biblioteca *SymPy* para realizar cálculos matemáticos simbólicos.	Librería de cálculo simbólico
2	*x = sp.symbols('x')*	Define *x* como una variable simbólica para usarla en expresiones matemáticas.	Variable simbólica
3	*T = 60 - 1.2*x + 0.02*x**2*	Define la función matemática *T*(*x*).	Definición de función
4	*derivada = sp.diff(T,x)*	Calcula la derivada de la función respecto a *x*.	Derivada
5	*resultado = sp.solve(derivada)*	Resuelve la ecuación cuando la derivada es igual a 0.	Punto crítico
6	*print(resultado)*	Muestra el valor de *x* donde la función tiene un máximo o mínimo.	Resultado: *x* = 30

Al graficar en Google Colab se obtiene la Figura 31.



Figura 31. Gráfica de ejercicio 9.

Fuente: Elaboración propia.

10. Conclusión técnica del análisis

La carga óptima del servidor ocurre con 30 solicitudes por segundo.

4.5.2 Ejemplo 10: Optimización de Algoritmos y Procesamiento de Datos

1 Planteamiento del problema en contexto tecnológico



Figura 32. Algoritmos de procesamiento de datos.

Fuente: Elaboración propia.

El tiempo de ejecución de un algoritmo de procesamiento de datos (Ver Figura 32) depende del tamaño del conjunto de datos analizado.

Se ha observado que:

- El sistema tiene un tiempo base de ejecución de 20 segundos.
- Cuando el tamaño del lote de datos aumenta moderadamente, el sistema aprovecha técnicas de paralelización y optimización de memoria, lo que reduce el tiempo de ejecución en 0.5 segundos por cada mil registros adicionales.
- Sin embargo, cuando el volumen de datos continúa creciendo, la sobrecarga computacional provoca un incremento del tiempo de

procesamiento, modelado mediante un término cuadrático de 0.01 segundos por cada mil registros al cuadrado.

Se desea determinar el tamaño del lote de datos que minimiza el tiempo de procesamiento del algoritmo.

1. Definición de la variable de decisión

x = número de miles de registros procesados

2. Formulación del modelo matemático

El tiempo total de procesamiento del algoritmo ($P(x)$) está compuesto por:

- Tiempo base de ejecución: 20
- Decremento lineal por lote: $-0.5x$
- Incremento cuadrático: $0.01x^2$

Por lo tanto, la función que modela el tiempo de procesamiento del algoritmo es:

$$P(x) = 20 - 0.5x + 0.01x^2$$

3. Cálculo de la primera derivada de la función

Se deriva la función respecto a x:

$$P'(x) = \frac{d}{dx}(20 - 0.5x + 0.01x^2)$$

$$P'(x) = -0.5 + 0.02x$$

4. Determinación de los puntos críticos

Se iguala la primera derivada a cero:

$$-0.5 + 0.02x = 0$$

Se resuelve:

$$0.02x = 0.5$$

$$x = \frac{0.5}{0.02}$$

El valor crítico es:

$$x = 25$$

5. Aplicación del criterio de la segunda derivada

Se calcula la segunda derivada:

$$P''(x) = \frac{d}{dx}(-0.5 + 0.02x)$$

$$P''(x) = 0.02$$

$$P''(x) > 0$$

Como es positiva, el punto $x = 25$ corresponde a un mínimo.

6. Cálculo del valor óptimo de la función

$$P(25) = 20 - 0.5(25) + 0.01(25^2)$$

$$P(25) = 20 - 12.5 + 6.25$$

$$P(25) = 13.75$$

7. Interpretación del resultado en el contexto del problema

El algoritmo alcanza su mejor rendimiento cuando procesa aproximadamente 25 mil registros por lote, porque minimiza su tiempo de procesamiento.

8. Implementación computacional en Google Colab

```
import sympy as sp

# Definir la variable simbólica 'x'
x = sp.symbols('x')

# Definir la función de producción P en términos de x
P = 20 - 0.5*x + 0.01*x**2

# Calcular la primera derivada de P con respecto a x
derivada_P = sp.diff(P, x)

# Resolver la ecuación derivada_P = 0
puntos_criticos = sp.solve(derivada_P)

# Imprimir los puntos críticos
print(puntos_criticos)
```

```
[25.0000000000000]
```

Figura 33. Codificación para ejemplo 10 en Google Colab.

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 33 se presenta la codificación utilizada en Google Colab**,** la cual es similar a la empleada en el Ejercicio 6**.**

Al realizar la gráfica en Google Colab, se obtiene un resultado similar al mostrado en el Ejercicio 6 (Ver Figura 34).

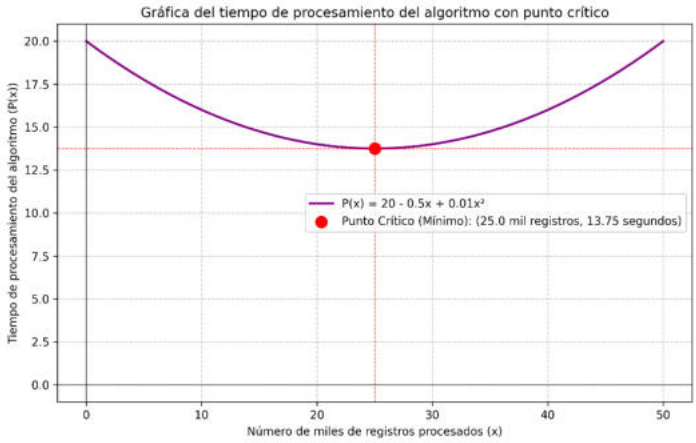


Figura 34. Gráfica de ejercicio 10.

Fuente: Elaboración propia.

9. Conclusión técnica del análisis

El análisis matemático muestra que el tamaño de lote que permite optimizar el rendimiento del algoritmo es de 25 mil registros.

4.5.3 Ejemplo 11: Optimización en Redes y Tráfico de Datos

1. Planteamiento del problema en contexto tecnológico

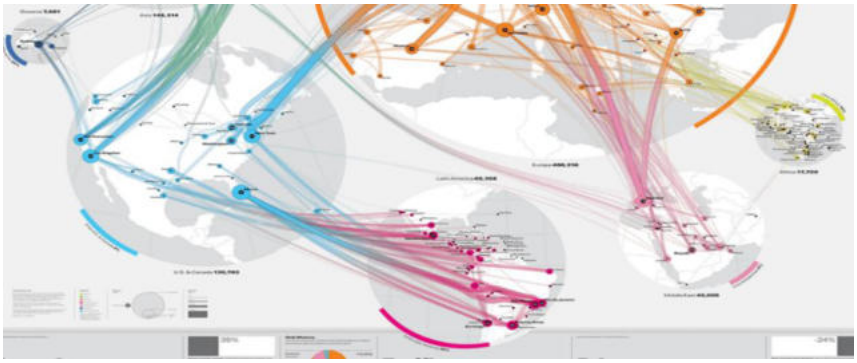


Figura 35. Redes y Tráfico de Datos.

Fuente: Elaboración propia.

El tiempo de transmisión en una red depende del número de paquetes enviados (Ver Figura 35).

Se ha observado que:

- El sistema presenta un tiempo base de transmisión de 80 ms.
- Cuando el número de paquetes aumenta moderadamente, los mecanismos de compresión y agrupamiento de paquetes mejoran la eficiencia de transmisión, reduciendo el tiempo en 2 ms por paquete adicional.
- No obstante, cuando la cantidad de paquetes continúa creciendo, la congestión de la red provoca un aumento del tiempo de

transmisión, modelado mediante un término cuadrático de 0.03 ms por paquete al cuadrado.

Se desea determinar cuántos paquetes deben transmitirse para minimizar el tiempo de transmisión de la red.

2. Definición de la variable de decisión

x = número de paquetes transmitidos

3. Formulación del modelo matemático

El tiempo total de transmisión de la red ($D(x)$) está compuesto por:

- Tiempo base de transmisión: 80
- Decremento lineal por paquete: $-2x$
- Incremento cuadrático: $0.03x^2$

Por lo tanto, la función que modela el tiempo de transmisión de la red es:

$$D(x) = 80 - 2x + 0.03x^2$$

4. Cálculo de la primera derivada de la función

Se deriva la función respecto a x:

$$D'(x) = \frac{d}{dx}(80 - 2x + 0.03x^2)$$

$$D'(x) = -2 + 0.06x$$

5. Determinación de los puntos críticos

Se iguala la primera derivada a cero:

$$-2 + 0.06x = 0$$

Se resuelve:

$$0.06x = 2$$

$$x = \frac{2}{0.06}$$

El valor crítico es:

$$x \approx 33.33$$

6. Aplicación del criterio de la segunda derivada

Se calcula la segunda derivada:

$$D''(x) = \frac{d}{dx}(-2 + 0.06x)$$

$$D''(x) = 0.06$$

$$D''(x) > 0$$

Al ser positiva, existe un mínimo.

7. Cálculo del valor óptimo de la función

$$D\,(33.33) \approx 80 - 2(33.33) + 0.03(33.33^2)$$

$$D\,(33.33) \approx 80 - 66.66 + 33.33$$

$$D\,(33.33) \approx 46.67$$

8. Interpretación del resultado en el contexto del problema

La red alcanza su mínimo tiempo de transmisión con aproximadamente 33 paquetes.

9. Implementación computacional en Google Colab

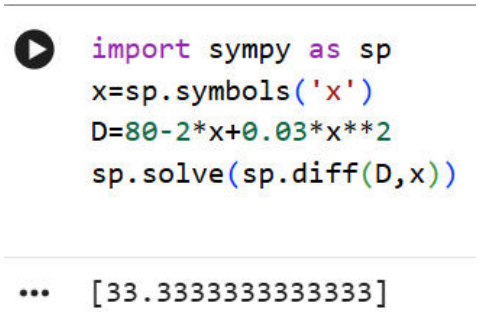


Figura 36. Codificación para ejemplo 11 en Google Colab.

Fuente: Elaboración propia.

La codificación, que consta en la Figura 36, es similar a la utilizada en los dos últimos ejemplos, al igual que la gráfica que se obtendría.

10. Conclusión técnica del análisis

La transmisión de datos se optimiza cuando se envían aproximadamente 33 paquetes, logrando un mejor rendimiento de la red.

4.5.4 Ejemplo 12: Optimización en Ciberseguridad

1. Planteamiento del problema en contexto tecnológico



Figura 37. sistema de detección de intrusos (IDS).

Fuente: Elaboración propia.

Un sistema de detección de intrusos (IDS) analiza alertas de seguridad generadas por una red informática (Ver Figura 37). Las mediciones del sistema indican que:

- El sistema presenta un tiempo base de análisis de 100 ms.
- Cuando el número de alertas aumenta moderadamente, los algoritmos de aprendizaje automático permiten procesar múltiples eventos de manera eficiente, reduciendo el tiempo de análisis en 3 ms por cada alerta adicional.
- Sin embargo, cuando el número de alertas es demasiado grande, la sobrecarga del sistema provoca un incremento del tiempo de

análisis, representado por un término cuadrático de 0.05 ms por alerta al cuadrado.

Se desea determinar cuántas alertas por minuto minimizan el tiempo de análisis del sistema.

2. Definición de la variable de decisión

x = número de alertas analizadas por minuto

3. Formulación del modelo matemático

El tiempo total de análisis del sistema ($S(x)$) está compuesto por:

- Tiempo base de análisis: 100
- Decremento lineal por alerta: $-3x$
- Incremento cuadrático: $+0.05x^2$

Por lo tanto, la función que modela el tiempo de análisis del sistema es:

$$S(x) = 100 - 3x + 0.05x^2$$

4. Cálculo de la primera derivada de la función

$$S'(x) = \frac{d}{dx}(100 - 3x + 0.05x^2)$$

$$S'(x) = -3 + 0.1x$$

5. Determinación de los puntos críticos

$$-3 + 0.1x = 0$$

$$0.1x = 3$$

$$x = \frac{3}{0.1}$$

El valor crítico es:

$$x = 30$$

6. Aplicación del criterio de la segunda derivada

$$S''(x) = \frac{d}{dx}(-3 + 0.1x)$$

$$S''(x) = 0.1$$

$$S''(x) > 0$$

Existe un mínimo.

7. Cálculo del valor óptimo de la función

$$S(30) = 100 - 3(30) + 0.05(30^2)$$

$$S(30) = 100 - 90 + 45$$

$$S(30) = 55$$

8. Interpretación del resultado en el contexto del problema

El sistema alcanza su mínimo tiempo de análisis, al analizar 30 alertas por minuto.

9. Implementación computacional en Google Colab

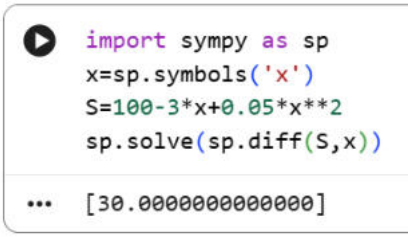


Figura 38. Codificación para ejemplo 12 en Google Colab.

Fuente: Elaboración propia.

10. Conclusión técnica del análisis

El sistema de ciberseguridad tiene su mejor rendimiento cuando analiza 30 alertas por minuto.

4.5.5 Ejemplo 13: Optimización de Eficiencia Energética en Infraestructura TI

1. Planteamiento del problema en contexto tecnológico



Figura 39. Consumo energético en infraestructura tecnológica.

Fuente: Elaboración propia.

Un centro de datos busca optimizar el consumo energético de su infraestructura tecnológica (Ver Figura 39).

Los administradores han observado lo siguiente:

- El sistema presenta un consumo energético base de 150 kWh, asociado al funcionamiento de sistemas de refrigeración, redes y almacenamiento.
- Cuando se activan más servidores, la virtualización y el balanceo de carga permiten utilizar mejor los recursos disponibles, reduciendo el consumo energético en 5 kWh por cada servidor adicional.

- Sin embargo, cuando el número de servidores activos sigue aumentando, el consumo energético comienza a incrementarse debido al uso intensivo de hardware y a la generación de calor, lo que se modela mediante un término cuadrático de 0.08 kWh por servidor al cuadrado.

Se desea determinar cuántos servidores deben mantenerse activos para minimizar el consumo energético del centro de datos.

2. Definición de la variable de decisión

x = número de servidores activos

3. Formulación del modelo matemático

El consumo energético total del sistema ($E(x)$) está compuesto por:

- Consumo energético base: 150
- Decremento lineal por servidor: $-5x$
- Incremento cuadrático: $0.08x^2$

Por lo tanto, la función que modela el consumo energético del sistema es:

$$E(x) = 150 - 5x + 0.08x^2$$

4. Cálculo de la primera derivada de la función

$$E'(x) = \frac{d}{dx}(150 - 5x + 0.08x^2)$$

$$E'(x) = -5 + 0.16x$$

5. Determinación de los puntos críticos

$$-5 + 0.16x = 0$$

$$0.16x = 5$$

$$x = \frac{5}{0.16}$$

El valor crítico es:

$$x = 31.25$$

6. Aplicación del criterio de la segunda derivada

$$E''(x) = \frac{d}{dx}(-5 + 0.16x)$$

$$E''(x) = 0.16$$

$$E''(x) > 0$$

Es un mínimo.

7. Cálculo del valor óptimo de la función

$$E(31.25) = 150 - 5(31.25) + 0.08(31.25^2)$$

$$E(31.25) = 150 - 156.25 + 78.125$$

$$E(31.25) = 41.875$$

8. Interpretación del resultado en el contexto del problema

Deben mantenerse activos 31 servidores para minimizar el consumo energético del centro de datos.

9. Implementación computacional en Google Colab

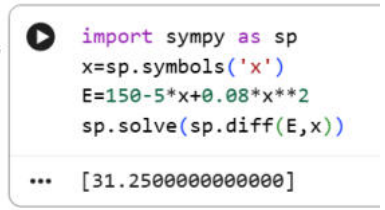


Figura 40. Codificación para ejemplo 13 en Google Colab.

Fuente: Elaboración propia.

10. Conclusión técnica del análisis

El análisis muestra que el centro de datos alcanza su mejor rendimiento energético con aproximadamente 31 servidores activos, optimizando el uso de recursos tecnológicos.

4.6 Piensa y analiza

Escenario:

Una empresa de computación en la nube ejecuta una arquitectura basada en microservicios para procesar solicitudes de usuarios.

Los ingenieros han modelado el tiempo promedio de respuesta del sistema $T(x)$ (en milisegundos) en función del número de contenedores activos x mediante el siguiente modelo:

$$T(x) = 0.002x^3 - 0.12x^2 + 2x + 120$$

donde:

x representa el número de contenedores activos que procesan solicitudes.

$T(x)$ representa el tiempo promedio de respuesta del sistema.

Este modelo refleja que:

- Al inicio, aumentar contenedores mejora el rendimiento.
- Después de cierto punto aparece sobrecarga de coordinación y comunicación entre servicios.
- Esto puede aumentar nuevamente el tiempo de respuesta.

Preguntas para reflexionar y analizar:

1. Determine el dominio relevante del modelo en el contexto tecnológico, y explique por qué la función es continua y derivable en dicho dominio.
2. ¿Cuántos contenedores deberían ejecutarse para minimizar el tiempo de respuesta?
3. ¿Qué significa en términos de infraestructura que exista un punto de inflexión?
4. Explique por qué agregar más recursos no siempre mejora el rendimiento del sistema.

4.7 Autoevalúate

Escoge el literal de la respuesta correcta a las siguientes interrogantes:

1. Un modelo matemático en el contexto de Tecnologías de la Información es:

a) Un programa informático que automatiza tareas.

b) Un sistema de almacenamiento de datos en servidores.

c) Un conjunto de instrucciones para ejecutar código en Python.

d) Una representación cuantitativa de un sistema real mediante variables y relaciones matemáticas.

2. ¿Cuál de los siguientes elementos puede considerarse una variable dentro de un modelo matemático?

a) El número de solicitudes procesadas por segundo.

b) La capacidad máxima de un servidor.

c) El sistema operativo utilizado.

d) La arquitectura del procesador.

3. En el proceso de modelado matemático, las restricciones representan:

a) Las limitaciones técnicas o físicas del sistema.

b) El código utilizado para programar el modelo.

c) Las bibliotecas utilizadas en Python.

d) Las herramientas de visualización de datos.

4. El objetivo principal del uso de derivadas en problemas de optimización es:

a) Simplificar ecuaciones algebraicas.

b) Encontrar puntos donde una función alcanza valores máximos o mínimos.

c) Convertir funciones en ecuaciones lineales.

d) Calcular el valor promedio de una función.

5. En el modelo de un sistema informático, la variable x representa el número de solicitudes por segundo que recibe un servidor. En este contexto, x es:

a) Una restricción

b) Un parámetro

c) Una variable de decisión

d) Una constante

6. Si $T'(x) = 1.2 - 0.04x$, el punto crítico de la función se obtiene cuando x =:

a) 20.

b) 25.

c) 30.

d) 40.

7. ¿Cuál de las siguientes bibliotecas de Python permite realizar cálculo simbólico, como derivar funciones?

a) NumPy

b) Pandas

c) Matplotlib

d) SymPy

8. Google Colab es principalmente:

a) Un sistema operativo para servidores.

b) Un entorno en línea para ejecutar cuadernos de Python sin instalar software.

c) Un lenguaje de programación especializado en redes.

d) Una base de datos distribuida.

9. En problemas de optimización aplicados a Tecnologías de la Información, el objetivo suele ser:

a) Eliminar completamente el uso de recursos del sistema.

b) Incrementar indefinidamente el número de recursos disponibles.

c) Sustituir el análisis matemático por programación.

d) Encontrar la configuración que maximiza o minimiza una variable de desempeño.

10. ¿Por qué el modelado matemático es importante en Tecnologías de la Información?

a) Porque reemplaza completamente la programación.

b) Porque permite analizar, predecir y optimizar el comportamiento de sistemas tecnológicos.

c) Porque reduce el número de algoritmos utilizados.

d) Porque evita el uso de herramientas computacionales.

Respuestas: 1-d; 2-a; 3-a; 4-b; 5-c; 6-c; 7-d; 8-b; 9-d; 10-b

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bisong, E. (2019). Google Colaboratory. En *Building Machine Learning and Deep Learning Models on Google Cloud Platform* (pp. 59-64). Apress. https://doi.org/10.1007/978-1-4842-4470-8_7

Briggs, W. L., Cochran, L., Gillett, B., & Schulz, E. (2019). *Calculus: Early Transcendentals* (3.ª ed.). Pearson.

Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., & Stein, C. (2022). *Introduction to algorithms* (Fourth edition). The MIT Press.

Grus, J. (2019). *Data Science from Scratch: First Principles with Python* (2.ª ed.). O'Reilly Media.

Harris, C. R., Millman, K. J., & van der Walt, S. J. (2020). Array programming with NumPy. *Nature*, *585*, 357-362. https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2

Hass, J. R., Heil, C. E., Weir, M. D., & Bogacki, P. (2022). *Thomas' Calculus* (15.ª ed.). Pearson.

Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2021). *Introduction to Operations Research* (11.ª ed.). McGraw-Hill Education.

Humpherys, J., & Jarvis, T. J. (2020). *Foundations of Applied Mathematics, Volume 2: Algorithms, Approximation, Optimization*. SIAM.

Hunter, J. D. (2007). Matplotlib: A 2D graphics environment. *Computing in Science & Engineering*, *9*(3), 90-95. https://doi.org/10.1109/MCSE.2007.55

IEEE. (2022). *IEEE Standard for System and Software Verification and Validation*. IEEE Standards Association.

James, G., Witten, D., Hastie, T., & Tibshirani, R. (2021). *An Introduction to Statistical Learning: With Applications in R*. Springer US. https://doi.org/10.1007/978-1-0716-1418-1

Kurose, J. F., & Ross, K. W. (2021). *Computer Networking: A Top-Down Approach* (8.ª ed.). Pearson.

Larson, R., & Edwards, B. H. (2021). *Calculus* (12.ª ed.). Cengage Learning.

Meurer, A., Smith, C. P., Paprocki, M., Čertík, O., Kirpichev, S. B., Rocklin, M., Kumar, Am., Ivanov, S., Moore, J. K., Singh, S., Rathnayake, T., Vig, S., Granger, B. E., Muller, R. P., Bonazzi, F., Gupta, H., Vats, S., Johansson, F., Pedregosa, F., … Scopatz, A. (2017). SymPy: Symbolic computing in Python. *PeerJ Computer Science*, *3*, e103. https://doi.org/10.7717/peerj-cs.103

National Academy of Engineering and National Research Council. (2009). *Engineering in K-12 Education: Understanding the Status and Improving the Prospects.* The National Academies Press. https://www.nationalacademies.org/publications/12635

Stewart, J., Clegg, D. K., & Watson, S. (2021). *Calculus: Early Transcendentals* (9.ª ed.). Cengage Learning.

Strang, G., & Herman, E. "Jed". (2022). *Cálculo volumen 1.* OpenStax. https://openstax.org/books/c%C3%A1lculo-volumen-1

Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2022). *Thomas' Calculus* (15.ª ed.). Pearson.

VanderPlas, J. (2023). *Python Data Science Handbook* (2.ª ed.). O'Reilly Media.

Virtanen, P., Gommers, R., & Oliphant, T. E. (2020). SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. *Nature Methods*, *17*(3), 261-272. https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2

Análisis matemático en la era digital: Máximos y mínimos de una función, con aplicaciones en TI y prácticas en Google Colab, se publicó en el mes de noviembre de 2026.

ISBN: 978-9907-852-07-3

Grupo Editorial BLR
Ecuador
Cel: +593 98 320 4362
https://grupoblr.com/
publicaciones@grupoblr.com

BIOGRAFÍA DE AUTORES

Maritza Alexandra Pinta:
Se desempeña como docente universitaria del área de Matemáticas desde 1996, dictando actualmente las cátedras de Análisis Matemático y Álgebra Lineal en la carrera de Tecnologías de la Información de la Universidad Técnica de Machala. Ha participado como autora de libros de Análisis Matemático y Métodos Numéricos y en proyectos de investigación relacionados con las matemáticas y las Tecnologías de la Información.

ANÁLISIS MATEMÁTICO EN LA ERA DIGITAL: MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN, CON APLICACIONES EN TI Y PRÁCTICAS EN GOOGLE COLAB

Estimado lector, este libro se fundamenta en el Análisis Matemático como un pilar formativo indispensable para los profesionales de las Tecnologías de la Información (TI), concibiendo a la disciplina como una herramienta analítica esencial para modelar, optimizar y evaluar el rendimiento de sistemas computacionales modernos.

Concebido como la continuación de una obra previa sobre cálculo diferencial, el texto está dirigido a estudiantes de segundo semestre de TI con dominio básico de las reglas fundamentales de derivación.

El núcleo temático profundiza en el cálculo y análisis de máximos y mínimos de funciones reales de una variable, capacitando al lector en métodos formales de optimización algorítmica y gestión tecnológica.

A través de este marco, se abordan problemáticas reales como el uso eficiente de recursos de hardware y software, la evaluación del desempeño computacional, el ajuste matemático de modelos y la toma de decisiones basada en datos.

Asimismo, la obra articula la deducción analítica con la experimentación científica mediante el uso de Python en el entorno interactivo de Google Colab.

Este enfoque aplicado promueve el aprendizaje activo y el pensamiento cuantitativo, capacitando al futuro tecnólogo para integrar el razonamiento matemático riguroso con la resolución práctica de desafíos algorítmicos en el ecosistema digital contemporáneo.

.

GRUPO BLR

Grupo Editorial BLR
Ecuador
Cel: +593 98 320 4362
https://grupoblr.com/
publicaciones@grupoblr.com

ISBN: 978-9907-852-07-3

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MACHALA
1969