GRUPO BLR

FUNDAMENTOS BÁSICOS DE MATEMÁTICAS PARA EL ESTUDIO DEL CALCULO DIFERENCIAL EN LA FACULTAD DE CIENCIAS AGROPECUARIAS

ISBN: 978-9907-802-32-0

Abrahan Rodolfo Cervantes Alava

2026

FUNDAMENTOS BÁSICOS DE MATEMÁTICAS PARA EL ESTUDIO DEL CALCULO DIFERENCIAL EN LA FACULTAD DE CIENCIAS AGROPECUARIAS

Abrahan Rodolfo Cervantes Alava

AUTOR

UTMACH

Este libro ha sido debidamente examinado y valorado en la modalidad doble par ciego con fin de garantizar la calidad científica.

©Grupo Editorial BLR
Universidad Técnica de Machala
Riobamba – Ecuador
Correo: publicaciones@grupoblr.com
https://grupoblr.com/libros-investigo
REPOSITORIO



Cervantes, A. (2026) Fundamentos básicos de matemáticas para el estudio del calculo diferencial en la facultad de ciencias agropecuarias. Grupo Editorial BLR.

©Abrahan Rodolfo Cervantes Alava

Fundamentos básicos de matemáticas para el estudio del calculo diferencial en la facultad de ciencias agropecuarias.

ISBN: 978-9907-802-32-0

El copyright promueve la libertad de expresión, protege la diversidad de ideas y conocimiento, además apoya la libre expresión. Se prohíbe de manera rigurosa la producción o el almacenamiento de esta publicación, ya sea en su totalidad o en parte, está estrictamente prohibido por ley, incluyendo el diseño de la portada, así como su difusión a través de cualquiera de sus medios, ya sean electrónicos, mecánicos, ópticos, de grabación o incluso de fotocopia, sin permiso de los propietarios de los derechos de autor.

Filiación del autor

Abrahan Rodolfo Cervantes Alava

Universidad Técnica de Machala

Correo Electrónico: arcervantes@utmachala.edu.ec

ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6223-8661

PRÓLOGO

El presente libro ha sido estructurado como una guía didáctica para facilitar el aprendizaje a los estudiantes que inician el primer ciclo en las carreras de Agronomía, Acuicultura, Medicina Veterinaria y Agropecuaria en la facultad de Ciencias Agropecuarias de la UTMACH

La asignatura de Cálculo Diferencial, forma parte de la malla curricular de la carrera de **Agronomía** como una unidad básica, consta de **144 horas**, equivalentes a **3 créditos académicos**. Su objetivo principal es **desarrollar habilidades para resolver operaciones de cálculo diferencial en funciones algebraicas y trascendentes**, así como **interpretar geométricamente las derivadas**.

El Cálculo Diferencial esta dentro de las disciplinas básicas en la FCA y constituye una herramienta importante para el estudio del Cálculo Integral, la propuesta de exponer ejercicios resueltos en cada capítulo facilitará el aprendizaje para desarrollar los contenidos académicos del silabo, como espacios curriculares en la distribución de horas, los ejemplos e ilustraciones de Algebra, Trigonometría, Geometría Analítica y Cálculo Diferencial, esto fortalecerá el aprendizaje adquirido en el bachillerato secundario y mejorará las habilidades y destrezas durante su permanencia dentro de las aulas en la facultad.

Los temas propuestos recogen la experiencia por más de 20 años como profesor titular de la Universidad Técnica de Machala, en las asignaturas de Cálculo Diferencial, Cálculo Integral y Ecuaciones Diferenciales en la facultad de Ciencias Agropecuarias.

Los conceptos y ejercicios propuestos abren un espacio de aprendizaje en los estudiantes, los temas propuestos les permitirá tener una mejor comprensión de los contenidos en las unidades de estudio, este aporte académico pretende facilitar la enseñanza dentro del aula de clases, los estudiantes podrán familiarizarse con los temas que se abordarán en primer y segundo nivel en facultad.

Índice

PRÓLOGO.....**i**

ÍNDICE DE TABLAS..... **vii**

ÍNDICE DE FIGURAS ..... **viii**

CAPÍTULO I **10**

1 ALGEBRA: FUNDAMENTOS BASICOS.....**10**

1.1 Expresiones algebraicas 11

1.2 Ecuaciones algebraicas.....12

1.3 Ejercicios resueltos mediante los casos de factorización del algebra de Baldor 15

1.3.1 Caso I: factor comun monomio.....16

1.3.2 Caso II: factor común por agrupación de términos.....22

1.3.3 Caso III: trinomio de cuadrado perfecto 29

1.3.4 Caso IV: diferencia cuadrado perfecto 36

CAPÍTULO II.....**40**

2 TRIGONOMETRIA: FUNDAMENTOS BASICOS.....**40**

2.1 Trigonometría 41

2.2 Ángulos y medidas de ángulos.....42

2.2.1 Clasificación de los ángulos por sus aberturas.....43

2.3 Triángulos.....46

2.3.1 Clasificación por sus lados.....46

2.3.2 Clasificación por sus ángulos.....47

2.3.3 Propiedades de los triángulos.....48

2.4 Funciones trigonométricas.....48

2.5 Desarrollo de la fórmula de Pitágoras para encontrar valores de los ángulos de 30°, 45° y 60° 49

2.5.1 Funciones trigonométricas 49

2.5.2 Cálculo de los valores de los lados o cateos en los triángulos rectángulos 50

2.5.3 Pasos para calcular ángulos de treinta grados (30°) utilizando Pitágoras.....52

2.5.4 Pasos para calcular ángulos de sesenta grados (60°) utilizando Pitágoras.....54

2.5.5 Cálculo de los valores de los lados o cateos en los triángulos rectángulos de 45° para calcular el valor hipotenusa.....55

2.5.6 Pasos para calcular las funciones trigonométricas de ángulos de cuarenta y cinco grados (45°) utilizando Pitágoras.....56

2.6 Regla general de las funciones trigonométricas 58

2.6.1 Ejercicios resueltos para encontrar las funciones trigonométricas 59

2.6.2 Ejercicios resueltos para encontrar los lados o catetos utilizando la fórmula de Pitágoras.....64

2.6.3 Procedimiento para hallar el ángulo B 80

2.7 Ángulos de cualquier Angulo o magnitud.....89

2.7.1 Ejercicios resueltos para encontrar las funciones trigonométricas de ángulos de cualquier magnitud.....90

CAPÍTULO III **94**

3 GEOMETRIA ANALITICA **94**

3.1 Geometría analítica 94

3.1.1 Distancia entre dos puntos 95

3.1.2 Ejercicios resueltos de geometría analítica 96

3.1.3 Ejercicios de circunferencias 106

CAPÍTULO IV **109**

4 FUNDAMENTOS BÁSICOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL **109**

4.1 Variables, funciones y limites 109

4.1.1 Variables 109

4.1.2 Constantes 110

4.1.3 Variable independientes y dependientes 111

4.1.4 División por cero excluida 112

4.1.5 Límites de variables 114

4.1.6 Ejercicios resueltos de funciones de variables 116

4.2 Límite de una función 122

4.2.1 Funciones continuas y discontinuas 122

4.3 Derivación por medio de la regla general 126

4.4 Regla general de derivación 128

4.4.1 Representación de la derivada 129

4.5 Derivación 132

4.5.1 derivada de una función 132

BIBLIOGRAFÍA 147

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Valores de los ángulos según sus funciones......57

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Representación gráfica de ángulos y catetos. 42
Figura 2. Angulo entre dos rectas.....43
Figura 3. Ángulos y catetos en los triángulos.....43
Figura 4. Angulo recto o de 90 grados. 44
Figura 5. Ángulo agudo de 60 grados. 44
Figura 6. Angulo obtuso de 120 grados. 44
Figura 7. Ángulos llanos.....45
Figura 8. Generación de ángulos.....45
Figura 9. Partes del triángulo.....46
Figura 10. Clasificación de los triángulos por sus lados. 47
Figura 11. Clasificación de los triángulos por sus ángulos. 47
Figura 12. Triángulo equilátero.....50
Figura 13. Representación gráfica de ángulos y catetos. *50*
Figura 14. Representación gráfica triángulo rectángulo según sus lados. 51
Figura 15. Lados de los triángulos. 52
Figura 16. Lado de los triángulos de 45°. 56
Figura 17. Ejemplo 4. 64
Figura 18. Ejemplo 6. 66
Figura 19. Ejemplo 8. 68
Figura 20. Ejemplo 11. 74
Figura 21. Ejemplo 12. 75
Figura 22. Ejemplo 13. 75
Figura 23. Ejemplo 14. 76
Figura 24. Ejemplo 15. 78
Figura 25. Teorema fundamental del triángulo. 80

Figura 26. Ejemplo 17. 81
Figura 27. Ejemplo 18. 84
Figura 28. Ejemplo 20. 86
Figura 29. Ejemplo 21. 89
Figura 30. Ángulos de cualquier Angulo o magnitud. 89
Figura 31. Ejemplo 22. 91
Figura 32. Ejemplo 23. 92
Figura 33. Distancia entre dos puntos. 96
Figura 34. Distancias. 98
Figura 35. Distancias. 99
Figura 36. Recta. 100
Figura 37. Vértices. 100
Figura 38. Longitud de la mediana AD. 102
Figura 39. Apéndice IA. 105
Figura 40. Formulas. 105
Figura 41. Ejemplo 9. 106
Figura 42. Gráfico de una función continua. 113
Figura 43. Gráfico de una función discontinua. 113
Figura 44. Grafica de áreas. 115

CAPÍTULO I

1 ALGEBRA: FUNDAMENTOS BASICOS

Los contenidos de Álgebra que se presentan en este capítulo se desarrollan de manera general e introductoria, y están estrechamente relacionados con el estudio de las unidades básicas de esta disciplina. Su propósito es servir como actividades académicas de nivelación que permitan a los estudiantes consolidar los conocimientos necesarios para iniciar con solvencia su formación en el campo de la ingeniería. Los temas expuestos proporcionan una base conceptual sólida, especialmente en lo referente a los casos de factorización, los cuales se explican mediante un enfoque didáctico, sencillo y progresivo. Además, se incluyen ejercicios prácticos resueltos e ilustraciones claras que facilitan la comprensión y contribuyen al logro del objetivo principal: hacer que el aprendizaje del álgebra sea accesible, significativo y útil para el estudiante.

Por otra parte, los ejercicios propuestos en este capítulo constituyen un espacio de aprendizaje activo que favorece la comprensión de los contenidos incluidos en las diferentes unidades de estudio. Este material académico busca fortalecer el proceso de enseñanza-aprendizaje dentro del aula, permitiendo que los estudiantes se familiaricen con los conceptos que abordarán en el primer nivel de la carrera. De este modo, estas herramientas servirán como fundamento para la resolución de problemas y el desarrollo de habilidades necesarias en asignaturas posteriores, especialmente en Cálculo Diferencial, dentro de la Facultad de Ciencias Agropecuarias.

La alta repitencia en la facultad de Ciencias Agropecuarias especialmente en las asignaturas básicas como Matemáticas, Calculo Diferencial e Integral nos obliga a plantear estas preguntas:

1. ¿Cuáles son las principales dificultades que enfrentan los estudiantes al iniciar sus estudios en Matemáticas y Cálculo Diferencial?

2. ¿Qué conocimientos previos deberían reforzarse para mejorar el desempeño en estas asignaturas?

3. ¿De qué manera influyen los hábitos de estudio en la repitencia de estas materias básicas?

4. ¿Qué estrategias pueden ayudar a disminuir la tasa de reprobación?

5. ¿Cómo puede el alumno identificar y corregir a tiempo sus vacíos conceptuales?

1.1 Expresiones algebraicas

Concepto. - Las expresiones algebraicas son las cantidades que forman parte de una ecuación que siempre están acompañadas de letras y que forman varios términos que contienen una o dos incógnitas.

Signos de operación. – En una expresión algebraica existe términos que están separados por signos ejemplos:

suma $(+)$, **resta** $(-)$, **multiplicación** (x), y la **división** $(\div)$, también pueden ser expresiones en potencia (a^3), o a raíces cuadradas $(\sqrt{x})$.

Signos Agrupación:

- **(x) Paréntesis ordinario**
- $[x]$ **Corchete**
- $\{x\}$ **Llaves**

1.2 Ecuaciones algebraicas

Concepto. - Una ecuación algebraica es una expresión que expresa una igualdad en las que hay varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas de variables. En una ecuación existen dos partes o miembros, el primer término se llama primer miembro de la igualdad y el segundo término se llama segundo miembro de la igualdad (Espol, 2006).

Miembros de una ecuación:

La ecuación algebraica, tiene dos miembros: a la izquierda el primer miembro y a la derecha el segundo miembro:

Ejemplo de una ecuación con una sola variable:

$$3x - 5 = 2x - 3$$

Primer miembro: Izquierda = Segundo miembro: Derecha

Tipos de ecuaciones algebraicas:

Las ecuaciones pueden ser de primer grado y de segundo grado con una o dos incógnitos ejemplos:

- Ecuación de primer grado con una incógnita

$$3x - 5 = 2x - 3$$

- Ecuación de primer grado con dos incógnitas

$$3x + 4y + 5 = 0$$

- Ecuación de segundo grado con una incógnita

$$3x^2 + 4x + 5 = 0$$

- Ecuación de segundo grado con dos incógnitas

$$3x^2 + 4y + 5 = 0$$

Términos de las ecuaciones algebraicas:

Los términos que forman parte de una ecuación algebraica, son cada una de las cantidades que están separadas o conectadas con otras expresiones algebraicas separadas por el signo, $+$, y/o $-$.

Grado de un término algebraico.

- **Grado Absoluto**. - Es cuando la expresión algebraica producto de la suma de sus exponentes da el número de grados ejemplo: $\boldsymbol{a^2b = tercer\ grado}$

Clases de ecuaciones:

- **Ecuación numérica. -** es cuando la expresión algebraica tiene una sola incógnita

  Ejemplo. $\mathbf{4x - 5 = x + 4}$

- **Ecuación literal**. - es cuando tiene una incógnita y otras letras

  Ejemplo. $\mathbf{3x + 2a = 5b - bx}$

- **Ecuación entera. -** cuando no tiene denominador

  Ejemplo. $\mathbf{3x + 2a = 5b - bx}$

- **Ecuación fraccionaria. -** cuando alguno o todos sus términos tiene numerador y denominador.

  Ejemplo. $\mathbf{\frac{3x}{2} + \frac{6x}{5} = 5 + \frac{x}{6}}$

Identidad en una ecuación:

Concepto. - La identidad en una ecuación algebraica, se lee igual a (=), lo que significa "idéntico a" ósea es la expresión algebraica que demuestra que existe, una igualdad entre el primer y segundo en la ecuación, pero cada miembro separado por el signo igual. (Baldor, 1989).

Los siguientes ejemplos se ilustra las diferentes igualdades que se pueden dar en cada expresión algebraica.

Ejemplo 1:

En el primer ejemplo se expone que en el primer miembro está el polinomio $(a-b)^2$ y en el segundo miembro se expresa el resultado de la aplicación de resolver el caso de factorización planteado para el ejemplo es el binomio d del cuadrado perfecto:

$$(\boldsymbol{a-b})^{\boldsymbol{2}} = (\boldsymbol{a-b})(\boldsymbol{a-b})$$

Ejemplo 2:

En el primer ejemplo se expone que en el primer miembro está el polinomio $(\boldsymbol{a^2-m^2})$, y en el segundo miembro se expresa el resultado de la aplicación de resolver el caso de factorización planteado para el ejemplo es una diferencia de cuadrado perfecto:

$$(\boldsymbol{a^2-m^2}) = (\boldsymbol{a+m})(\boldsymbol{a-m})$$

Ejemplo 3:

En el primer ejemplo se expone que en el primer miembro está el polinomio $(\boldsymbol{x+y})^{\boldsymbol{2}}$ y en el segundo miembro se expresa el resultado de la aplicación de resolver el caso de factorización planteado para el ejemplo es el binomio d del cuadrado perfecto:

$$(\boldsymbol{x+y})^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{x^2+2xy+y^2}$$

1.3 Ejercicios resueltos mediante los casos de factorización del algebra de Baldor

Los casos de factorización tratados en este capítulo, son ejercicios tomados del libro del Álgebra de Baldor, los ejemplos desarrollados

cumplen el objetivo de facilitar el aprendizaje resolviendo varios ejercicios de fácil revisión por parte de los estudiantes (Baldor, 1989).

1.3.1 Caso I: factor comun monomio

Ejemplo 1.

Encontrar el factor común de la expresión algebraica: $\boldsymbol{8m^2 - 12mn}$

Paso 1. Se busca el número o letra que se repita en ambos términos del ejercicio planteado con el menor valor de exponente o grado.

Factor común en ambos términos: la letra (m) y el número 4 que contiene o multiplica a ambos términos.

Resolución:

$$\boldsymbol{8m^2 - 12mn = 4m\,(2m - 3n)}$$

Para comprobar se multiplica el factor común fuera del paréntesis por los términos del factor dentro del paréntesis y el resultado será el esperado.

Ejemplo 2.

Encontrar el factor común de la expresión algebraica: $\boldsymbol{24a^2xy^2 - 36x^2y^4}$

Paso 1. Se busca el número o letra que se repita o que contenga en ambos términos del ejercicio planteado con el menor valor de exponente.

Factor común ambos términos: número (12) y las letras $\boldsymbol{(xy^2)}$

Resolución:

$$\mathbf{24a^2xy^2 - 36x^2y^4} = \ 12xy^2\ (2a^2 - 3xy^2)$$

Para comprobar se multiplica el factor común fuera del paréntesis por los términos del factor dentro del paréntesis y el resultado será el esperado.

Ejemplo 3.

Encontrar el factor común de la expresión algebraica: $\boldsymbol{a^{20} - a^{16} + a^{12} - a^8 + a^4 - a^2}$

Paso 1. Se la letra que se repita o que contenga en todos los términos del ejercicio planteado con el menor valor de exponente dado.

Resolución:

Factor común todos términos: la letra $\boldsymbol{(a^2)}$

$$\mathbf{a^{20} - a^{16} + a^{12} - a^8 + a^4 - a^2}$$
$$= a^2\ (a^{18} - a^{14} + a^{10} - a^6 + a^2 - 1)$$

Para comprobar se multiplica el factor común fuera del paréntesis por los términos del factor dentro del paréntesis y el resultado será el esperado.

Ejemplo 4.

Encontrar el factor común de la expresión algebraica**: x (a + 1) – (a +1)**

Paso 1. Se busca el factor que se repite o que contenga en ambos términos del ejercicio planteado.

Factor común: (a + 1)

$$\mathbf{x\,(a+1)-(a+1)} = (a+1)\,(x-1)$$

Para comprobar se multiplica el factor común fuera del paréntesis por los términos del factor dentro del paréntesis y el resultado será el esperado.

Ejemplo 5.

Encontrar el factor común de la expresión algebraica**:** $\boldsymbol{(a^2+1)-b(a^2+1)}$

Paso 1. Se busca el factor que se repite en que contenga en ambos términos del ejercicio planteado.

Factor común: (a^2+1)

$$\boldsymbol{(a^2+1)-b(a^2+1)} = (a^2+1)(1-b)$$

Para comprobar se multiplica el factor común fuera del paréntesis por los términos del factor dentro del paréntesis y el resultado será el esperado.

Ejemplo 6.

Encontrar el factor común de la expresión algebraica**: 3x (x – 2) – 2x (x – 2)**

Paso 1. Se busca el factor que se repite en que contenga en ambos términos del ejercicio planteado.

Factor común: (x – 2)

$$\mathbf{3x\,(x-2)-2x\,(x-2)} = (x-2)\,(3x-2x)$$

Para comprobar se multiplica el factor común fuera del paréntesis por los términos del factor dentro del paréntesis y el resultado será el esperado.

Ejemplo 7.

Encontrar el factor común de la expresión algebraica**: (1 – x) + 2a (1 – x)**

Paso 1. Se busca el factor que se repite en que contenga en ambos términos del ejercicio planteado.

Factor común: (1 – x)

$$\mathbf{(1-x)+2a\,(1-x)} = (1-x)\,(1+2a)$$

Para comprobar se multiplica el factor común fuera del paréntesis por los términos del factor dentro del paréntesis y el resultado será el esperado.

Ejemplo 8.

Encontrar el factor común de la expresión algebraica**: 4x (n – m) - (n – m)**

Paso 1. Se busca el factor que se repite en que contenga en ambos términos del ejercicio planteado.

Factor común: (n – m)

Paso 2. Producto del artificio queda como resultado del factor común:

4x (n – m) – (n – m)= (n – m) (4x – 1)

Para comprobar se multiplica el factor común fuera del paréntesis por los términos del factor dentro del paréntesis y el resultado será el esperado.

Ejemplo 9.

Encontrar el factor común de la expresión algebraica**: (a + b – 1)** ($\boldsymbol{a^2}$ **+ 1) – (**$\boldsymbol{a^2}$ **– 1)**

Paso 1. Se busca el factor que se repite en que contenga en ambos términos del ejercicio planteado.

Factor común: ($\boldsymbol{a^2}$ + 1)

Paso 2. Producto del artificio queda como resultado del factor común:

(a + b – 1) (($\boldsymbol{a^2}$ + 1) – ($\boldsymbol{a^2}$ + 1) = ($\boldsymbol{a^2}$ + 1) ((a+b–1– 1)

Paso 3. Resultado final de la suma: = ($\boldsymbol{a^2}$ + 1) (a + b – 2)

Para comprobar se multiplica el factor común fuera del paréntesis por los términos del factor dentro del paréntesis y el resultado será el esperado.

Ejemplo 10.

Encontrar el factor común de la expresión algebraica**: (a + b – c) (x – 3) – (b – c – a) (x – 3)**

Paso 1. Se busca el factor que se repite en que contenga en ambos términos del ejercicio planteado.

Factor común: (x – 3)

Paso 2. Producto del artificio queda como resultado del factor común:

(a + b – c) (x – 3) – (b – c – a) (x – 3) = (x – 3) (a + b – c – b + c + a)

Paso 3. Resultado final de la suma**: (x – 3) (2a)**

Para comprobar se multiplica el factor común fuera del paréntesis por los términos del factor dentro del paréntesis y el resultado será el esperado.

Ejemplo 11.

Encontrar el factor común de la expresión algebraica**: (3x + 2) (x + y – z) - (3x + 2) - (x + y - 1) (3x + 2)**

Paso 1. Se busca el factor que se repite en que contenga en ambos términos del ejercicio planteado.

Factor común: **(3x + 2)**

Paso 2. Producto del artificio queda como resultado del factor común:

(3x + 2) (x + y – z – 1 – x – y + 1)

Paso 3. Resultado final de la suma**: -Z (3x + 2)**

Para comprobar se multiplica el factor común fuera del paréntesis por los términos del factor dentro del paréntesis y el resultado será el esperado.

1.3.2 Caso II: factor común por agrupación de términos

Para resolver estos ejercicios se requiere que existan cuatro términos y que en cada termino exista un factor común, sean monomios o polinomios.

Ejemplo 12.

Encontrar el factor común de la expresión algebraica que contiene dos términos polinomios: $(\boldsymbol{a^2 + ab}) + (\boldsymbol{ax + bx})$

Paso 1. Factor común por agrupación de cada factor o polinomio: **a (a + b) + x (a + b)**

Paso 2. Producto del artificio queda como resultado del factor común: **(a + b)**

Paso 3. Resultado final del factor común por agrupación de sus términos semejantes**:**

$$\mathbf{(a + b)\,(a + x)}$$

$$\mathbf{a\,(a + b) + x\,(a + b) = (a + b)\,(a + x)}$$

Para comprobar se multiplica el factor común fuera del paréntesis por los términos del factor dentro del paréntesis y el resultado será el esperado.

Ejemplo 13.

Encontrar el factor común de la expresión algebraica que contiene cuatro términos monomios**:** $\boldsymbol{x^2 + x - a^2 - a^2x}$

Paso 1. Factor común por agrupación de cada factor o polinomio: $\boldsymbol{x(1 + x) - a^2(1 + x)}$

Paso 2. Producto del artificio queda como resultado del factor común: $\boldsymbol{(1 + x)}$

Paso 3. Resultado final del factor común por agrupación de sus términos semejantes: $\boldsymbol{(x + 1)(x - a^2)}$

Para comprobar se multiplica el factor común fuera del paréntesis por los términos del factor dentro del paréntesis y el resultado será el esperado.

Ejemplo 14.

Encontrar el factor común de la expresión algebraica que contiene cuatro términos monomios: $\boldsymbol{4a^3 - 1 - a^2 + 4a}$

Paso 1. Se ordena por grado cada letra según sea el monomio**:**

$$\boldsymbol{4a^3 - a^2 - 1 + 4a}$$

Paso 2. Producto del artificio queda como resultado del factor común en cada termino o polinomio**:** $\boldsymbol{a^2(4a - 1) + (4a - 1)}$

Paso 3. Resultado final del factor por agrupación de términos semejantes:

$$\boldsymbol{(4a - 1)(a^2 + 1)}$$

Para comprobar se multiplica el factor común fuera del paréntesis por los términos del factor dentro del paréntesis y el resultado será el esperado.

Ejemplo 15.

Encontrar el factor común de la expresión algebraica que contiene cuatro términos monomios: $\boldsymbol{3abx^2 - 2y^2 - 2x^2 + 3aby^2}$

Paso 1. Se ordena por grado cada letra según sea el polinomio: $\boldsymbol{x^2(3ab - 2) + y^2(3ab - 2)}$

Paso 2. Producto del artificio queda como resultado del factor común en cada termino o polinomio:

$$\boldsymbol{(3ab - 2)(x^2 + y^2)}$$

Para comprobar se multiplica el factor común fuera del paréntesis por los términos del factor dentro del paréntesis y el resultado será el esperado.

Ejemplo 16.

Encontrar el factor común de la expresión algebraica que contiene cuatro términos monomios: $\boldsymbol{6ax + 3a + 1 + 2x}$

Paso 1. Se ordena por grado cada letra según sea el polinomio que se forma:

$$\boldsymbol{(6ax + 2x) + (3a + 1)}$$

Paso 2. Producto del artificio queda como resultado del factor común en cada termino o polinomio:

$$\boldsymbol{2x(3a + 1) + (3a + 1)}$$

Paso 3. Se saca el factor común de los dos polinomios y este es el resultado

$$\boldsymbol{(3a + 1)(2x + 1)}$$

Para comprobar se multiplica el factor común fuera del paréntesis por los términos del factor dentro del paréntesis y el resultado será el esperado.

Ejemplo 17.

Encontrar el factor común de la expresión algebraica que contiene cuatro términos monomios: $\boldsymbol{3x^3 - 9ax^2 - x + 3a}$

Paso 1. Se ordena por grado cada letra según sea el polinomio:

$$\boldsymbol{3x^2(x-3a)-(x-3a)}$$

Paso 2. Producto del artificio queda como resultado del factor común en cada termino o polinomio:

$$\boldsymbol{3x^2(x-3a)-(x-3a)=(x-3a)(3x^2-1)}$$

Paso 3. Se saca el factor común de los dos polinomios y este es el resultado:

$$\boldsymbol{(x-3a)(3x^2-1)}$$

Para comprobar se multiplica el factor común fuera del paréntesis por los términos del factor dentro del paréntesis y el resultado será el esperado.

Ejemplo 18.

Encontrar el factor común de la expresión algebraica que contiene cuatro términos monomios: $\boldsymbol{2x^2y+2xz^2+y^2z^2+xy^3}$

Paso 1. Se ordena por grado cada letra según sea el polinomio:

$$= \boldsymbol{(z^2+y)}$$

Paso 2. Producto del artificio queda como resultado del factor común en cada termino o polinomio:

$$\boldsymbol{2x(z^2+yx)+y^2(z^2+yx)}$$

Paso 3. Se saca el factor común de los dos polinomios y este es el resultado:

$$(\boldsymbol{z^2 + yx})(\boldsymbol{2x + y^2})$$

Para comprobar se multiplica el factor común fuera del paréntesis por los términos del factor dentro del paréntesis y el resultado será el esperado.

Ejemplo 19.

Encontrar el factor común de la expresión algebraica que contiene cuatro términos monomios: $\boldsymbol{1 + a + 3ab + 3b}$

Paso 1. Se ordena por grado cada letra según sea el polinomio:

$$\boldsymbol{(1 + a) + 3b(a + 1)}$$

Paso 2. Producto del artificio queda como resultado del factor común en cada termino o polinomio:

$$\boldsymbol{(1 + a) + 3b(a + 1)}$$

Paso 3. Se saca el factor común de los dos polinomios y este es el resultado:

$$\boldsymbol{(1 + a) + (3b + 1)}$$

Para comprobar se multiplica el factor común fuera del paréntesis por los términos del factor dentro del paréntesis y el resultado será el esperado.

Ejemplo 20.

Encontrar el factor común de la expresión algebraica que contiene cuatro términos monomios: $\boldsymbol{4am^3 - 12amn - m^2 + 3n}$

Paso 1. Se ordena por grado cada letra según sea el monomio:

$$\boldsymbol{4am^3 - m^2 - 12amn + 3n}$$

Paso 2. Producto del artificio queda como resultado del factor común en cada termino o polinomio:

$$\boldsymbol{m^2(4am - 1) - [3n(1 - 4am)]}$$

$$= \quad \boldsymbol{(4am - 1)}$$

Paso 3. Se saca el factor común de los dos polinomios y este es el resultado:

$$\boldsymbol{(4am - 1)\ (m^2 + 3n)}$$

Para comprobar se multiplica el factor común fuera del paréntesis por los términos del factor dentro del paréntesis y el resultado será el esperado.

Ejemplo 21.

Encontrar el factor común de la expresión algebraica que contiene seis términos monomios: $\boldsymbol{2am - 2an + 2a - m + n - 1}$

Paso 1. Se ordena por grado cada letra según sea el polinomio:

$$(\mathbf{2am - 2an + 2a}) - (\mathbf{m - n + 1})$$

Paso 2. Producto del artificio queda como resultado del factor común en cada termino o polinomio:

$$\mathbf{2a}(\mathbf{m - n + 1}) - (\mathbf{m - n + 1})$$

Paso 3. Se saca el factor común de los dos polinomios y este es el resultado:

$$(\mathbf{m - n + 1})(\mathbf{2a - 1})$$

Para comprobar se multiplica el factor común fuera del paréntesis por los términos del factor dentro del paréntesis y el resultado será el esperado.

1.3.3 Caso III: trinomio de cuadrado perfecto

Para resolver ejercicios por medio del trinomio de cuadrado perfecto se extrae la raíz del primero y tercer término y se multiplica por 2, si el resultado da igual al segundo término el ejercicio si es un trinomio de cuadrado perfecto (Baldor, 1989).

Ejemplo 22.

Resolver el trinomio de cuadrado perfecto de la expresión algebraica: $\mathbf{4x^2 + 12xy + 9y^2}$

Paso 1.- Se saca la raíz cuadrada del primero y tercer termino.

$\boldsymbol{4x^2 + 12xy + 9y^2}$

$\boldsymbol{2x}$ $\boldsymbol{3y}$

Paso 2.- Como si tienen raíz exacta se procede a resolverlo:

Entonces si es un tercer caso: porque al multiplicar la raíz del primero por la raíz del tercero por valor numérico de (2) nos da el segundo término ($\boldsymbol{12xy}$)

$$(\boldsymbol{2x + 3y})(\boldsymbol{2x + 3y}) = (\boldsymbol{2x + 3y})^{\boldsymbol{2}}$$

Para comprobar se resuelve nuevamente el binomio de cuadrado perfecto del resultado final.

Ejemplo 23.

Resolver el trinomio de cuadrado perfecto de la expresión algebraica:

$$\boldsymbol{a^2 - 2ab + b^2 =}$$

Paso 1.- Se saca la raíz cuadrada del primero y tercer termino.

$\boldsymbol{a^2 - 2ab + b^2 =}$

$\boldsymbol{a^{\frac{2}{2}}}$ $\boldsymbol{b^{\frac{2}{2}}}$

Paso 2.- Como si tienen raíz exacta se procede a resolverlo:

Entonces si es un tercer caso: porque al multiplicar la raíz del primero por la raíz del tercero por (2) es igual al valor del segundo término ($\boldsymbol{2ab}$)

$$\boldsymbol{a^2 - 2ab + b^2} = (b - a)^2$$

Para comprobar se resuelve nuevamente el binomio de cuadrado perfecto del resultado final.

Ejemplo 24.

Resolver el trinomio de cuadrado perfecto de la expresión algebraica: $\mathbf{1 - 2a^3 + a^6 =}$

Paso 1.- Se saca la raíz cuadrada del primero y tercer termino.

$\mathbf{1 - 2a^3 + a^6 =}$ $\quad (1 - a^3)^2$

$\sqrt{x}$ $\quad a^{\frac{6}{2}}$

1 $\quad a^3$

Paso 2.- Como si tienen raíz exacta se procede a resolverlo:

Entonces si es un tercer caso: porque al multiplicar la raíz del primero por la raíz del tercero por (2) es igual al valor del segundo término ($\mathbf{2a^3}$)

Para comprobar se resuelve nuevamente el binomio de cuadrado perfecto del resultado final.

Ejemplo 25.

Resolver el trinomio de cuadrado perfecto de la expresión algebraica: $\mathbf{9b^2 - 30a^2b + 25a^4}$

Paso 1.- Se saca la raíz cuadrada del primero y tercer termino.

$\mathbf{9b^2 - 30a^2b + 25a^4 =}$ $\quad (3b - 5a^2)^2$

$3b$ $5a^2$

Paso 2.- Como si tienen raíz exacta se procede a resolverlo:

Entonces si es un tercer caso: porque al multiplicar la raíz del primero por la raíz del tercero por (2) es igual al valor del segundo término ($\mathbf{30a^2b}$)

Para comprobar se resuelve nuevamente el binomio de cuadrado perfecto del resultado final.

Ejemplo 26.

Resolver el trinomio de cuadrado perfecto de la expresión algebraica: $\mathbf{1 + 14x^2y + 49x^4y^2}$

Paso 1.- Se saca la raíz cuadrada del primero y tercer termino.

$\mathbf{1 + 14x^2y + 49x^4y^2} = \quad (1 + 7x^2y)^2$

1 $7x^2y$

Paso 2.- Como si tienen raíz exacta se procede a resolverlo:

Entonces si es un tercer caso: porque al multiplicar la raíz del primero por la raíz del tercero por (2) es igual al valor del segundo término ($\mathbf{14x^2y}$)

Para comprobar se resuelve nuevamente el binomio de cuadrado perfecto del resultado final.

Ejemplo 27.

Resolver el trinomio de cuadrado perfecto de la expresión algebraica:
$\boldsymbol{400x^{10} + 40x^5 + 1}$

Paso 1.- Se saca la raíz cuadrada del primero y tercer termino.

$\boldsymbol{400x^{10} + 40x^5 + 1} = (20x^5 + 1)^2$

$20x^5$ $\qquad\qquad$ 1

Paso 2.- Como si tienen raíz exacta se procede a resolverlo:

Entonces si es un tercer caso: porque al multiplicar la raíz del primero por la raíz del tercero por (2) es igual al valor del segundo término ($\boldsymbol{40x^5}$)

Para comprobar se resuelve nuevamente el binomio de cuadrado perfecto del resultado final.

Ejemplo 28.

Resolver el trinomio de cuadrado perfecto de la expresión algebraica:
$\boldsymbol{\frac{a^2}{4} - ab + b^2 =}$

Paso 1.- Se saca la raíz cuadrada del primero y tercer termino.

$\boldsymbol{\frac{a^2}{4} - ab + b^2 =} \ (\frac{a}{2} - b)^2$

$\boldsymbol{\frac{a}{2}}$ $\qquad\qquad$ **b**

Paso 2.- Como si tienen raíz exacta se procede a resolverlo:

$$\frac{a^2}{4} - ab + b^2 = \left(\frac{a}{2} - b\right)^2$$

Entonces si es un tercer caso: porque al multiplicar la raíz del primero por la raíz del tercero por (2) es igual al valor del segundo término (**ab**)

Ejemplo 29.

Resolver el trinomio de cuadrado perfecto de la expresión algebraica:

$$a^4 - a^2b^2 + \frac{b^4}{4}$$

Paso 1.- Se saca la raíz cuadrada del primero y tercer termino.

$$a^4 - a^2b^2 + \frac{b^4}{4} = \left(a^2 - \frac{b^2}{2}\right)^2$$

a^2 $\qquad$ $\frac{b^2}{2}$

Paso 2.- Como si tienen raíz exacta se procede a resolverlo:

Entonces si es un tercer caso: porque al multiplicar la raíz del primero por la raíz del tercero por (2) es igual al valor del segundo término (a^2b^2)

Ejemplo 30.

Resolver el trinomio de cuadrado perfecto de la expresión algebraica:

$$4m^2 - 4m(n-m) + (n-m)^2 =$$

Paso 1.- Se saca la raíz cuadrada del primero y tercer termino.

$$4m^2 - 4m(n-m) + (n-m)^2 = \quad (2m - (n-m))^2$$

2m (n- m) = $(2m - n + m)^2$

= $(3m - n)^2$

Paso 2.- Como si tienen raíz exacta se procede a resolverlo:

Entonces si es un tercer caso: porque al multiplicar la raíz del primero por la raíz del tercero por (2) es igual al valor del segundo término $[\boldsymbol{4m(n - m)}]$

Para comprobar el resultado se resuelve el binomio de cuadrado perfecto+

Ejemplo 31.

Resolver el trinomio de cuadrado perfecto de la expresión algebraica: $\boldsymbol{9(x - y)^2 + 12(x - y)(x + y) + 4(x + y)^2}$

Paso 1.- Se saca la raíz cuadrada del primero y tercer término.

$\boldsymbol{9(x - y)^2 + 12(x - y)(x + y) + 4(x + y)^2 =}$

$3(x - y)$ 2(x+y) = $[3(x - y) + 2(x + y)]$

$= [3x - 3y + 2x + 2y]$

$= [5x - y]^2$

Paso 2.- Como si tienen raíz exacta se procede a resolverlo:

Entonces si es un tercer caso: porque al multiplicar la raíz del primero por la raíz del tercero por (2) es igual al valor del segundo término $[\mathbf{12}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})]$

Para comprobar el resultado se resuelve el binomio de cuadrado perfecto

1.3.4 Caso IV: diferencia cuadrado perfecto

Para reconocer una diferencia de cuadrado perfecto de una expresión algebraica solo falta reconocer en el polinomio que debe ser una resta y que el primer y tercer termino tengan raíz exacta.

Ejemplo 32.

Resolver la diferencia del cuadro perfecto del polinomio en la expresión algebraica:

$$\boldsymbol{a^2 - b^2 =}$$

Paso 1.- Se verifica que el factor debe ser un polinomio que resta el primer término menos el segundo término, luego se extrae la raíz cuadrada del primero y segundo término.

$$\boldsymbol{a^2 - b^2 =}$$

$$\boldsymbol{\sqrt{a^2}\ \sqrt{b^2}}$$

$$\boldsymbol{a - b}$$

Paso 2.- Como si tienen raíz exacta se procede a resolverlo: en primer lugar, se resta el resultado de extraer la raíz del primer término menos la

raíz del segundo término, y en segundo lugar se coloca entre paréntesis con signo positivo.

$$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)}$$

Ejemplo 33.

Resolver la diferencia del cuadro perfecto del polinomio en la expresión algebraica: $\boldsymbol{x^2 - y^2}$

Paso 1.- Se saca la raíz cuadrada del primero y segundo término.

$$\boldsymbol{.x^2 - y^2 =}$$

$$\boldsymbol{\sqrt{x^2}\ \sqrt{y^2}}$$

$$\boldsymbol{x - y}$$

Paso 2.- Como si tienen raíz exacta se procede a resolver

$$\mathbf{x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)}$$

Ejemplo 34.

Resolver la diferencia del cuadro perfecto del polinomio en la expresión algebraica:

$$\mathbf{a^2 - 25 =}$$

Paso 1.- Se saca la raíz cuadrada del primero y segundo término.

$$\mathbf{a^2 - 25 =}$$

$\sqrt{\mathbf{a^2}}\ \sqrt{\mathbf{25}}$

a 5

Paso 2.- Como si tienen raíz exacta se procede a resolver

$$\mathbf{a^2 - 25 = (a + 5)(a - 5)}$$

Ejemplo 35.

Resolver la diferencia del cuadro perfecto del polinomio en la expresión algebraica:

$$\mathbf{100} - x^2y^6 =$$

Paso 1.- Se saca la raíz cuadrada del primero y segundo término.

$$\mathbf{100 - x^2y^6 =}$$

10 $\boldsymbol{xy^3}$

Paso 2.- Como si tienen raíz exacta se procede a resolver

$$\mathbf{100 - x^2y^6 = (10 + xy^3)(10 - xy^3)}$$

Ejemplo 36.

Resolver la diferencia del cuadro perfecto del polinomio en la expresión algebraica:

Paso 1.- Se saca la raíz cuadrada del primero y segundo término.

$$1 - 9a^2b^4c^6d^8 =$$

$\sqrt{1} \quad \sqrt{9a^2b^4c^6d^8}$

$1 - \ 3ab^2c^3d^4$

Paso 2.- Como si tienen raíz exacta se procede a resolver y se obtiene el resultado final

$(1 + 3ab^2c^3d^4)\ (1 - 3ab^2c^3d^4)$.

El estudiante reconocerá y clasificará términos algebraicos, monomios y polinomios, así como la multiplicación de factores entre sí. Además, establecerá la relación entre estas operaciones y los principales casos de factorización estudiados en la educación secundaria, con el propósito de fortalecer las bases algebraicas necesarias para abordar con solvencia los contenidos en los que el álgebra constituye una herramienta fundamental para la resolución de ejercicios en Cálculo Diferencial.

CAPÍTULO II

2 TRIGONOMETRIA: FUNDAMENTOS BASICOS

Los temas de trigonometría desarrollados en este capítulo permitirán a los estudiantes comprender y afianzar los conceptos esenciales relacionados con los ángulos, sus elementos y la manera en que se vinculan con los lados y catetos de los triángulos. Además, se abordan las funciones trigonométricas fundamentales y sus aplicaciones básicas, presentadas de forma clara y progresiva para facilitar su asimilación. Cada contenido incluye explicaciones detalladas, ejemplos resueltos paso a paso y actividades prácticas, acompañadas de ilustraciones sencillas que ayudan a visualizar los conceptos y favorecen un aprendizaje significativo.

El enfoque de este capítulo no solo busca introducir definiciones y procedimientos, sino también promover la capacidad de razonamiento y resolución de problemas en los estudiantes. A través de ejercicios contextualizados y aplicados, se pretende que los lectores reconozcan la utilidad de la trigonometría en diversos campos de la ingeniería y en situaciones del entorno real. Esto contribuye a desarrollar confianza en el manejo de los conceptos y a fortalecer las bases matemáticas requeridas para estudios más avanzados.

Los contenidos y actividades propuestas constituyen un espacio de aprendizaje integral para los estudiantes de las cuatro carreras que oferta la facultad, convirtiendo este capítulo en un texto de consulta básico y necesario. La estructura del material, cuidadosamente organizada, permitirá a los estudiantes mejorar su comprensión de los temas

incluidos en las unidades de estudio y apoyar su proceso de nivelación académica. Este aporte académico tiene como finalidad facilitar la labor docente dentro del aula, proporcionando recursos claros y accesibles que acompañen los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En consecuencia, los estudiantes podrán familiarizarse desde el inicio con los contenidos que enfrentarán durante el primer semestre en la facultad, lo que contribuirá a fortalecer sus habilidades matemáticas, a mejorar su rendimiento académico y a promover una transición más adecuada hacia su formación profesional dentro del campo de la ingeniería.

2.1 Trigonometría

Concepto de Trigonometría. - Es una ciencia básica que es parte de la matemática y se emplea en muchos campos del conocimiento, tanto teóricos como prácticos, e interviene en investigaciones geométricas y algebraicas en las cuales aparecen las funciones trigonométricas. Como ciencia estudia los lados y ángulos de los triángulos.

Etimológicamente la trigonometría significa:

Tri. = tres
Gono. = ángulo
Metría. = medida

A principio la trigonometría aparece como parte de la geometría, tratando de formular las relaciones entre las medidas angulares y las longitudes de los lados de un triángulo. Este tipo calculista surgió para resolver problemas astronómicos por parte de los griegos (Hiparco, 180

– 125 a. C.). Posteriormente se emplea para calcular áreas, distancias en base a la resolución de triángulos (Granville, 1967).

La trigonometría mide los lados o catetos de los triángulos, su longitud se la calcula a través de la fórmula de **Pitágoras: Y**

Formula de Pitágoras: $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$

Definición: La fórmula detalla que el cuadrado de la hipotenusa ($\boldsymbol{c^2}$), es igual al cuadrado de sus otros dos lados o catetos del triángulo, sea el lado (a) él cateto opuesto al **ángulo A** y el lado b el cateto opuesto al **ángulo B**, en la figura 1 describe que para cada vértice o unión de rectas de los triángulos se engendra un ángulo, siendo el lado inicial donde se engendra el ángulo inicial cuando se dirige hacia arriba contrario a las manecillas del reloj (Swokowki, 2009).

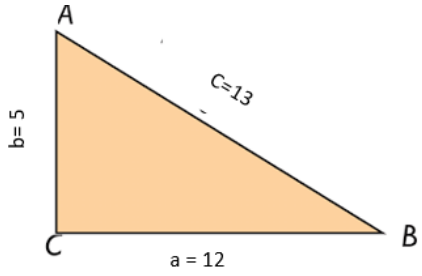


Figura 1. Representación gráfica de ángulos y catetos.

Fuente: Elaboración propia.

2.2 Ángulos y medidas de ángulos

Concepto de ángulo. - un ángulo engendra su magnitud (área abertura) a partir de dos rectas, una recta inicial que forma la base y una recta final que es la que determina su magnitud o abertura o línea final, la unión de

estas dos rectas donde se engendran el ángulo se lo conoce como el vértice (figura 1).

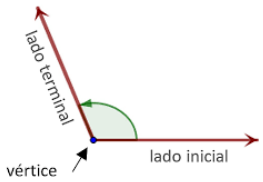


Figura 2. Angulo entre dos rectas.

Fuente: Elaboración propia.

Designación de los ángulos y catetos: Los ángulos se los designa con letra mayúscula en orden alfabético, ángulo A, ángulo B y ángulo C. Al frente de cada ángulo están sus lados o catetos opuestos, los cuales se los designa con la letra minúscula correspondiente, ángulo A, cateto a; ángulo B, cateto b y ángulo C, cateto c.

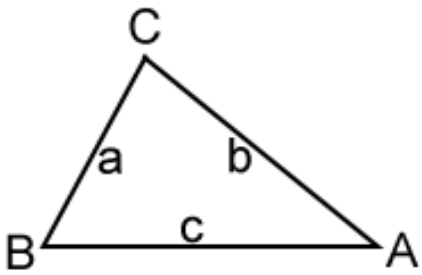


Figura 3. Ángulos y catetos en los triángulos.

Fuente: Elaboración propia.

2.2.1 Clasificación de los ángulos por sus aberturas

Los ángulos por su abertura se clasifican en:

Ángulo recto: Son aquellos ángulos que tiene un ángulo recto o de 90°en su vértice

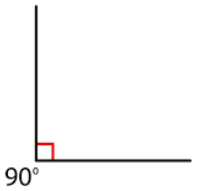


Figura 4. Angulo recto o de 90 grados.

Ángulo agudo: son aquellos que tienen ángulos menores a 90°

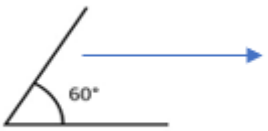


Figura 5. Ángulo agudo de 60 grados.

Ángulo obtuso: tienen un ángulo mayor a 90°

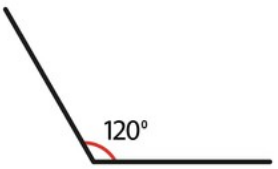


Figura 6. Angulo obtuso de 120 grados.

Ángulos llanos: tiene un ángulo de 180° en su base

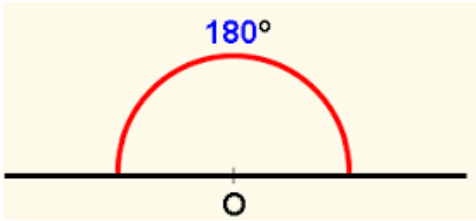


Figura 7. Ángulos llanos.

Generación de ángulos. Los ángulos se engendran de acuerdo a la dirección de su lado final o recta final de la siguiente manera:

Ángulos positivos

Cuando la recta inicial gira en sentido contrario de las manecillas del reloj o hacia arriba.

Ángulos negativos

Cuando la recta inicial gira a favor de las manecillas del reloj o hacia abajo.

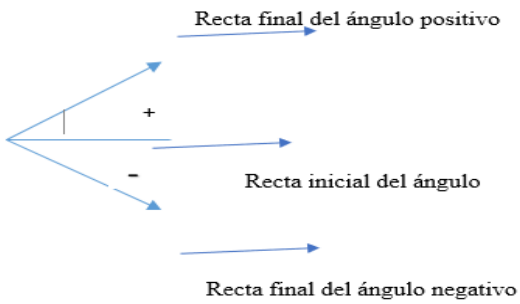


Figura 8. Generación de ángulos.

2.3 Triángulos

Los triángulos o trígonos son figuras geométricas planas, básicas, que poseen tres lados en contacto entre sí y unidas en puntos comunes denominados vértices. Su nombre proviene del hecho de que posee tres ángulos interiores o internos, formados por cada par de líneas en contacto en un mismo vértice.

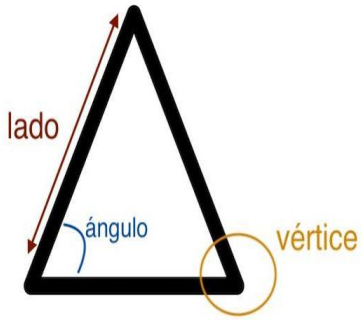


Figura 9. Partes del triángulo.

2.3.1 Clasificación por sus lados

Los triángulos por sus lados se clasifican en:

- **Triángulos Equiláteros**: Son aquellos ángulos que tiene sus tres lados iguales
- **Triángulos Isósceles:** Son aquellos que tienen dos lados iguales
- **Triángulo Escaleno**: Los tres lados que forman al triangulo son desiguales.

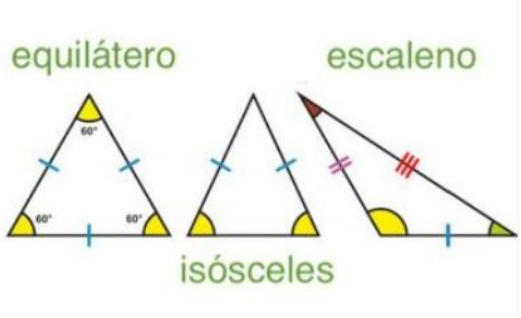


Figura 10. Clasificación de los triángulos por sus lados.

2.3.2 Clasificación por sus ángulos

Los triángulos por sus ángulos se clasifican:

- **Triángulos Rectángulo**: Tiene un ángulo de 90° y dos ángulos agudos
- **Triángulos Acutángulo:** Son aquellos que tienen sus ángulos menores a 90°
- **Triángulos Oblicuándolos**: No tienen un ángulo recto
- **Triángulos Obtusángulo**: Son aquellos que tienen en su base más de 90°

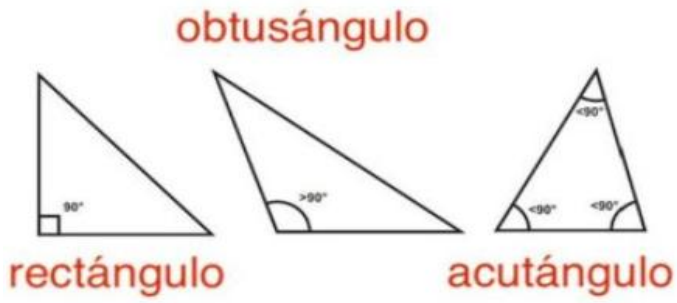


Figura 11. Clasificación de los triángulos por sus ángulos.

2.3.3 Propiedades de los triángulos

- La suma de las medidas de los ángulos interiores de todo triángulo es igual a 180°
- La suma de las medidas de los ángulos agudos en un triángulo rectángulo es igual a 90°
- Los ángulos interiores de un triángulo equilátero miden 60°

2.4 Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas son relaciones matemáticas que se usan para medir ángulos y triángulos, se definen a partir de las razones trigonométricas y se aplican a todos los números reales y complejos; Estas pueden ser agrupadas de tal manera que los miembros de cada uno de los pares son los reciproco de los miembros de los otros (Sparks & Rees, 2012).

Las funciones trigonométricas son seis: Seno, Coseno, Tangente, Cotangente, Secante y Cosecante y se las define etimológicamente como:

1. $\boldsymbol{Sen}$
2. $\boldsymbol{Cos}$
3. $\boldsymbol{Tg}$
4. $\boldsymbol{Ctg}$
5. $\boldsymbol{Sec}$
6. $\boldsymbol{Csc}$

Las 6 funciones trigonométricas en el **ángulo A**, se las define de la siguiente manera los lados o catetos respectivos:

$$\text{sen A} = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \text{A} = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \text{A} = \frac{catato\ opuesto}{catato\ adyacente} = \frac{a}{b}$$

$$ctg\ A = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{b}{a}$$

$$sec\ A = \frac{hipotenusa}{catato\ adyacente} = \frac{c}{b}$$

$$\text{csc A} = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{c}{a}$$

2.5 Desarrollo de la fórmula de Pitágoras para encontrar valores de los ángulos de 30°, 45° y 60°

2.5.1 Funciones trigonométricas

Concepto. - Las funciones trigonométricas, como el seno, el coseno y la tangente, son relaciones matemáticas que se aplican específicamente a los triángulos rectángulos. En los triángulos rectángulos los lados o catetos se los calcula su longitud o distancia utilizando la fórmula de

Pitágoras: $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$, la figura 12 muestra un triángulo equilátero de lados iguales a (2).

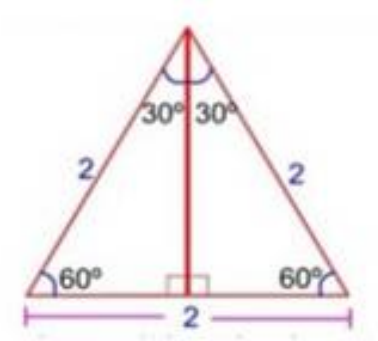


Figura 12. Triángulo equilátero.

Los catetos o lados son representados por letras en minúscula en relación a sus ángulos representados en letras mayúsculas (figura 3).

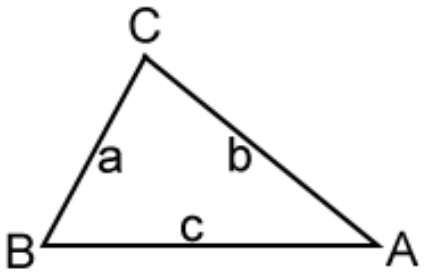


Figura 13. Representación gráfica de ángulos y catetos.

2.5.2 Cálculo de los valores de los lados o cateos en los triángulos rectángulos

Los lados en el triángulo rectángulo se calculan utilizando la fórmula de Pitágoras $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$, donde la hipotenusa o lado (c) representa el lado mayor representado por la letra mayúsculas (L) que equivale al

lado completo del cateto opuesto al ángulo C, el lado (a) como el cateto adyacente del ángulo C, donde su valor es la mitad de su lado ($a = \frac{L}{2}$) debido a que el triángulo equilátero se lo dividido en dos partes (figura 14). Con estos dos valores se puede calcular el tercer cateto o lado del triángulo.

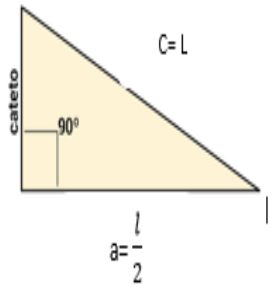


Figura 14. Representación gráfica triángulo rectángulo según sus lados.

Pasos para calcular el cateto (b) despejando en la fórmula de Pitágoras $c^2 = a^2 + b^2$.

Paso 1.- se despaja el cateto b: $\boldsymbol{b^2} = c^2 - a^2$

Paso 2.- remplaza al valor de los catetos y se extrae la raíz cuadrada del lado b: $b = \sqrt{L^2 - \left(\frac{L^2}{2^2}\right)}$

Paso 3.- se resuelve el cuadrado del cateto a: $b = \sqrt{L^2 - \frac{L^2}{4}}$

Paso 4.- saca mínimo común denominador mcd: $b = \sqrt{\frac{4l^2 - l^2}{4}}$

Paso 5.- se resuelve el numerador: $b = \sqrt{\frac{3l^2}{4}}$

Paso 6.- se extrae raíz cuadrado a (L) y al valor del denominador (4): $b = \frac{L\sqrt{3}}{2}$

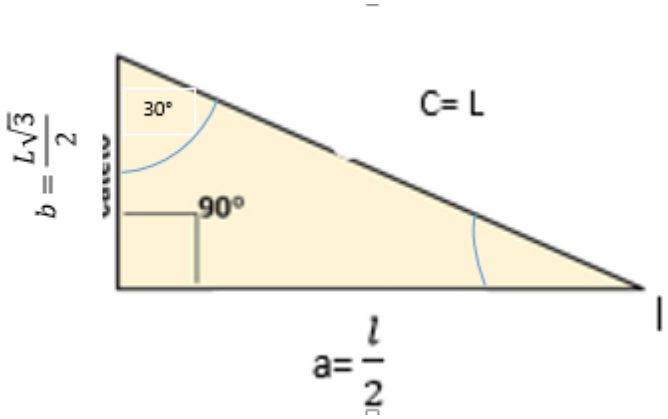


Figura 15. Lados de los triángulos.

2.5.3 Pasos para calcular ángulos de treinta grados (30°) utilizando Pitágoras

Los valores para ángulos de 30° se calcula de la siguiente manera: donde el cateto (a) es igual a lado ($a = \frac{L}{2}$) y la hipotenusa es igual a lado (L) (Bedoya, 1992).

Paso 1.- Se reemplazo los valores de cada cateto **a** y **c** en la definición del ángulo así:

$$sen\ 30° = \frac{a}{c} = \frac{\frac{L}{2}}{L} = \frac{L}{2\,L} = \frac{1}{2}$$

Paso 2.- Se reemplazo los valores de cada cateto **b** y **c** en la definición del ángulo así:

$$\cos 30° = \frac{b}{c} = \frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{\frac{L}{1}} = \frac{L\sqrt{3}}{2\,L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Paso 3.- Se reemplazo los valores de cada cateto **a** y **b** en la definición del ángulo así:

$$\text{tg}\, 30° = \frac{a}{b} = \frac{\frac{L}{2}}{\frac{L\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\,L}{2\,L\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Paso 4.- Se reemplazo los valores de cada cateto **b** y **a** en la definición del ángulo así:

$$ctg\ 30° = \frac{b}{a} = \frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{L/2} = \frac{2\,L\sqrt{3}}{2\,L} = \sqrt{3}$$

Paso 5.- Se reemplazo los valores de cada cateto **c** y **b** en la definición del ángulo así:

$$\sec 30° = \frac{c}{b} = \frac{L}{\frac{L\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\,L}{L\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Paso 6.- Se reemplazo los valores de cada cateto **c** y **a** en la definición del ángulo así:

$$\csc 30° = \frac{c}{a} = \frac{\frac{L}{1}}{\frac{L}{2}} = \frac{2\,L}{L} = 2$$

2.5.4 Pasos para calcular ángulos de sesenta grados (60°) utilizando Pitágoras

Los valores para ángulos de 60° se calcula de la siguiente manera: donde el cateto (b) es igual a lado opuesto y su valor es igual $(\frac{L\sqrt{3}}{2})$, donde la hipotenusa es igual a lado (L).

Paso 1.- Se reemplazo los valores de cada cateto **b** y **c** en la definición del ángulo así:

$$sen\ 60° = \frac{b}{c} = \frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{L} = \frac{L\sqrt{3}}{2\ L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Paso 2.- Se reemplazo los valores de cada cateto **a** y **c** en la definición del ángulo así:

$$cos60° = \frac{a}{c} = \frac{\frac{L}{2}}{\frac{l}{1}} = \frac{L}{2\ L} = \frac{1}{2}$$

Paso 3.- Se reemplazo los valores de cada cateto **b** y **a** en la definición del ángulo así:

$$tg\ 60° = \frac{b}{a} = \frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{\frac{L}{2}} = \frac{2\ L\sqrt{3}}{2\ L} = \sqrt{3}$$

Paso 4.- Se reemplazo los valores de cada cateto **a** y **b** en la definición del ángulo así:

$$ctg\ 60° = \frac{a}{b} = \frac{\frac{L}{2}}{\frac{L}{2}} = \frac{2\ L}{2\ L\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Paso 5.- Se reemplazo los valores de cada cateto **c** y **a** en la definición del ángulo así:

$$\sec 60° = \frac{c}{a} = \frac{\frac{L}{}}{\frac{L}{2}} = \frac{2\ L}{L} = 2$$

Paso 6.- Se reemplazo los valores de cada cateto **c** y **b** en la definición del ángulo así:

$$\csc 60° = \frac{L}{\frac{L\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\ L}{L\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

2.5.5 Cálculo de los valores de los lados o cateos en los triángulos rectángulos de 45° para calcular el valor hipotenusa

El valor de los lados en los triángulos isósceles o de 45°, se calcula utilizando la fórmula de Pitágoras: $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$**,** para calcular el valor de la hipotenusa o lado (c) en la formula se sigue los siguientes pasos:

Donde:

Paso 1.- sacar la raíz al cateto (c) o hipotenusa en la fórmula de Pitágoras.

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Paso 2.- se remplaza el valor de sus lados con la letra (L)

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$c = \sqrt{L^2 + L^2}$$

Paso 3.- se sumas el valor de sus lados y se halla el valor de la hipotenusa

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$c = \sqrt{L^2 + L^2}$$
$$c = \sqrt{2}L^2$$

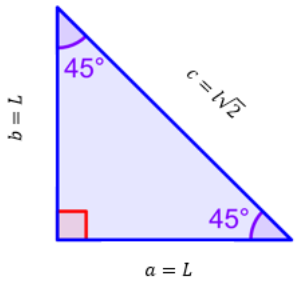


Figura 16. Lado de los triángulos de 45°.

2.5.6 Pasos para calcular las funciones trigonométricas de ángulos de cuarenta y cinco grados (45°) utilizando Pitágoras.

Paso 1.- Se reemplazo los valores de cada cateto **a** y **c** en la definición del ángulo así:

$$sen\ 45° = \frac{a}{c} = \frac{L}{L\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Paso 2.- Se reemplazo los valores de cada cateto **b** y **c** en la definición del ángulo así:

$$\cos 45° = \frac{b}{c} = \frac{L}{L\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Paso 3.- Se reemplazo los valores de cada cateto **a** y **b** en la definición del ángulo así:

$$tg\ 45° = \frac{a}{b} = \frac{L}{L} = 1$$

Paso 4.- Se reemplazo los valores de cada cateto **c** y **b** en la definición del ángulo así:

$$\sec 45° = \frac{c}{b} = \frac{L\sqrt{2}}{L} = \sqrt{2}$$

Paso 5.- Se reemplazo los valores de cada cateto **c** y **a** en la definición del ángulo así:

$$\csc 45° = \frac{L\sqrt{2}}{L} = \sqrt{2}$$

Tabla de los valores para los ángulos agudos de 30°, 45° y 60°

En la tabla 1, constan los valores reales de cada función según el valor de los ángulos agudos en los triángulos rectángulos, aplicando la fórmula de Pitágoras.

Tabla 1. Valores de los ángulos según sus funciones.

ÁNGULOS	**FUNCIONES**					

	sen	cos	tg	ctg	sec	Csc
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Regla general para calcular el valor de los lados o catetos: Según la definición de las funciones trigonométricas de los ángulos A y B se debe aplicar las definiciones anteriormente definidas en este capítulo para simplificar el desarrollo de los ejercicios.

2.6 Regla general de las funciones trigonométricas

Las seis funciones trigonométricas para los ángulos A y B, en un triángulo rectángulo se las calcula según sean de acuerdo a los ejemplos definidos en la siguiente formula:

- **Funciones del ángulo A.**

$$\text{sen. A} = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

$$\text{cos. A} = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

$$\text{tg. A} = \frac{catato\ opuesto}{catato\ adyacente} = \frac{a}{b}$$

- **Funciones del ángulo B.**

$$\text{sen. B} = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

$$\cos. \text{B} = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

$$\text{tg. B} = \frac{catato\ opuesto}{catato\ adyacente} = \frac{b}{a}$$

2.6.1 Ejercicios resueltos para encontrar las funciones trigonométricas

Los siguientes ejercicios de aplicación son útiles para obtener éxito en la resolución de ejercicios para calcular el valor de los lados o catetos y de las seis funciones trigonométricas.

EJEMPLO 1.

Hallar la hipotenusa (c) en el triángulo rectángulo donde la función trigonométrica del $sen\ A = \frac{4}{5}$ y el cateto $a = 80$

Datos:

$sen\ A = \frac{4}{5}$

cateto $a = 80$

cateto c = ?

$Definicion\ de\ la\ funcion\ \ sen\ A = \frac{a}{c}$

Resolución: Aplicando las definiciones de cada función y realizando la transposición de términos se obtendrá el resultado.

Primer paso: Reemplazar el valor del ángulo A en la función según la definición de la regla.

$$Sen\ A = \frac{4}{5} = por\ definicion = \frac{a}{c}$$

$$Sen\ A = \frac{4}{5} = \frac{a}{c}$$

Segundo paso. Se hace la transposición de términos de los denominadores a multiplicar en cruz

$$\frac{4}{5} = \frac{a}{c}$$

$$4\,c = 5a$$

Tercer paso. Despejar el cateto c

$$c = \frac{5a}{4}$$

Cuarto paso. Reemplazar el valor del cateto a para hallar el valor de la hipotenusa

$$c = \frac{400}{4}$$

$$c = 100$$

EJEMPLO 2.

Hallar la hipotenusa (c) en el triángulo rectángulo donde la función $tg\ B = K$ y el cateto $a = r$

Datos:

$tg\ B = K$

cateto $a = r$

cateto c = ?

$$Definicion\ de\ la\ funcion \quad tgB = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ \ adyacente} = \frac{b}{a}$$

Resolución

Primer paso. Reemplazar el valor del ángulo A en la función según la definición de la regla

$$tg\ B = K = por\ definicion = \frac{b}{a}$$

$$tg\ B = k = \frac{b}{a}$$

Segundo paso. Se hace la transposición de términos de los denominadores a multiplicar en cruz

$$k = \frac{b}{a}$$

$$k.a = b$$

$$b = k.a$$

remplaza a = r

$$b = k.r$$

Tercer paso. Se aplica la fórmula de Pitágoras $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$, y se saca la raíz al cateto (c) o hipotenusa que es el valor a encontrar: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Cuarto paso. Reemplazar el valor de los catetos **a y b** y se saca factor común para encontrar el valor de la hipotenusa (c)

$$c = \sqrt{r^2 + (k.r)^2}$$

$$c = \sqrt{r^2 + k.^2 r.^2}$$

$$c = r\sqrt{1 + k.^2}$$

EJEMPLO 3.

Hallar las funciones trigonométricas del ángulo B sabiendo que el cateto b= p y el cateto a= q

Datos:

$cateto\ b = p$

cateto $a = q$

Ângulo B = ?

$$Definicion\ de\ la\ funcion \quad sen\ B = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

Resolución.

Primer paso. Se aplica la fórmula de Pitágoras $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$**,** y se saca la raíz al cateto (c) o hipotenusa que es el valor a encontrar: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Segundo paso. Reemplazar el valor de los catetos **a y b** y se saca factor común para encontrar el valor de la hipotenusa (c)

$$c = \sqrt{q^2 + p^2}$$

Tercer paso. Se reemplaza los valores de los catetos en la definición de cada función

$$senB = \frac{b}{c} = \frac{p}{\sqrt{q^2 + p^2}} \times \frac{\sqrt{q^2 + p^2}}{\sqrt{q^2 + p^2}} = \frac{p\sqrt{q^2 + p^2}}{q^2 + p^2}$$

$$\cos B = \frac{a}{c} = \frac{q}{\sqrt{q^2 + p^2}} \times \frac{\sqrt{q^2 + p^2}}{\sqrt{q^2 + p^2}} = \frac{p\sqrt{q^2 + p^2}}{q^2 + p^2}$$

$$tagB = \frac{b}{a} = \frac{p}{q}$$

2.6.2 Ejercicios resueltos para encontrar los lados o catetos utilizando la fórmula de Pitágoras

Como se dijo en los párrafos anteriores la fórmula de Pitágoras se utiliza para resolver ejercicios de aplicación en donde se busca encontrar los valores de los lados o catetos en los triángulos rectángulos.

Ejemplo 4.

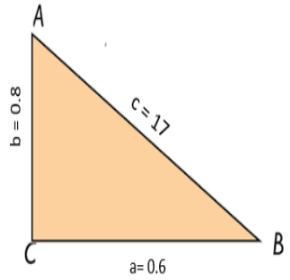


Figura 17. Ejemplo 4.

Hallar el valor de la hipotenusa (c) sabiendo que el cateto a= 0.8 y el cateto b = 0.6

Procedimiento:

Datos:

cateto a = 0.8

cateto b = 0.6

hipotenusa c = ?

Resolución

Paso 1. Se reemplaza los valores dados en el planteamiento del ejercicio en la fórmula de Pitágoras.

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c = \sqrt{0.6^2 + 0.8^2}$$
$$c = \sqrt{0.36 + 0.64}$$
$$c = \sqrt{1}$$
$$c = 1$$

Ejemplo 5.

Hallar las funciones trigonométricas del ángulo B donde el cateto a= 0,6, el cateto b = 0,8 y la hipotenusa c = 1

Procedimiento:

Datos:

Angulo B

cateto a = 0.6

cateto b = 0.8

hipotenusa c = 1.0

Resolución:

Paso 1. Se reemplaza los valores dados en el planteamiento del ejercicio en la fórmula de Pitágoras y se encuentran los valores de las funciones.

$$senB = \frac{b}{c} = \frac{0.8}{1} = 0.8 \qquad ctgB = \frac{a}{b} = \frac{0.6}{0.8} = 0.75$$

$$\cos B = \frac{a}{c} = \frac{0.6}{1} = 0.6 \qquad \sec B = \frac{c}{a} = \frac{1}{0.6} = 1.66$$

$$\tan B = \frac{b}{a} = \frac{0.8}{0.6} = 1.33 \qquad \csc B = \frac{c}{b} = \frac{1}{0.8} = 1.25$$

Ejemplo 6.

Hallar el valor de la hipotenusa (c) sabiendo que el cateto a= 12 y el cateto b = 5.

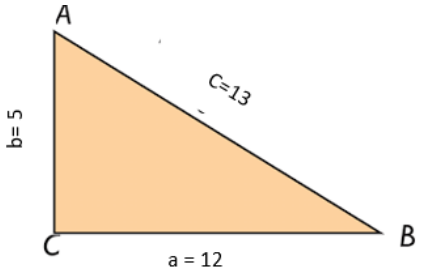


Figura 18. Ejemplo 6.

Procedimiento:

Datos:

cateto a = 12

cateto b = 5

hipotenusa c = ?

Resolución:

Formula de Pitágoras: $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$

Paso 1. Se despeja la hipotenusa $c = \sqrt{12^2 + 5^2}$

$$c = \sqrt{144 + 25}$$

Paso 2. Se reemplazo los datos $c = \sqrt{169}$

$$c = 13$$

Ejemplo 7.

Hallar las funciones trigonométricas del ángulo B donde el cateto a= 12 y el cateto b = 5 y la hipotenusa c = 13

Procedimiento:

Datos:

cateto a = 12

cateto b = 5

hipotenusa c = 13

Resolución:

Valor de las funciones:

Paso 1. Se reemplaza el valor de los catetos en las funciones trigonométricas

$$sen B = \frac{b}{c} = \frac{5}{13} \qquad ctg B = \frac{a}{b} = \frac{12}{5}$$

$$\cos B = \frac{a}{c} = \frac{12}{13} \qquad \sec B = \frac{c}{a} = \frac{13}{12}$$

$$\tan B = \frac{b}{a} = \frac{5}{12} \qquad \csc B = \frac{c}{b} = \frac{13}{5}$$

Ejemplo 8.

Hallar el cateto a en el triángulo rectángulo sabiendo que el cateto b = 2 y la hipotenusa c $= \sqrt{11}$

Resolución.

Paso 1. Copia la fórmula de Pitágoras para despejar el cateto a.

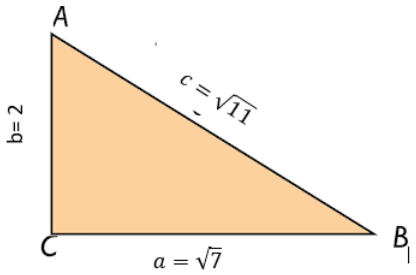


Figura 19. Ejemplo 8.

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$$

Paso 2. Se reemplaza los valores del cateto b y la hipotenusa en la fórmula.

$$a^2 = c^2 - b^2$$
$$a = \sqrt{\sqrt{11}^2 - 2^2}$$
$$a = \sqrt{11-4}$$
$$a = \sqrt{7}$$

Ejemplo 9.

Hallar las funciones trigonométricas del ángulo A donde el cateto, $a = \sqrt{7}$, el cateto b = 2 y la hipotenusa $c = \sqrt{11}$

Resolución.

Paso 1. Se reemplaza el valor de los catetos en cada uno de las funciones del ángulo a encontrar.

$$senA = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{11}} \times \left| \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{77}}{11} \right.$$
$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{2}{\sqrt{11}} \times \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}} = \frac{2\sqrt{11}}{11}$$
$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$
$$ctg = \frac{b}{a} = \frac{2}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$
$$\sec = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$
$$\csc = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{77}}{7}$$

Ejemplo 10.

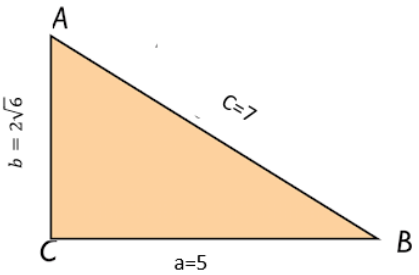
Hallar el cateto **b**, en el triángulo rectángulo sabiendo que el cateto a = 5 y la hipotenusa $c = 7$

Resolución.

Paso 1. Copia la fórmula de Pitágoras para despejar el cateto b.

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$$

Paso 2. Se reemplaza los valores del cateto a y la hipotenusa en la fórmula despejada.



$$b^2 = c^2 - a^2$$
$$b = \sqrt{7^2 - 5^2}$$
$$b = \sqrt{49 - 25}$$
$$b = \sqrt{24}$$
$$b = 2\sqrt{6}$$

Ejemplo 8.

Hallar las funciones trigonométricas del ángulo B, donde el cateto, $hipotenusa\ c = 7$, el cateto a = 5 y el cateto b $= 2\sqrt{6}$

Resolución.

Paso 1. Se reemplaza el valor de los catetos en cada uno de las funciones del ángulo a encontrar.

$$senB = \frac{b}{c} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

$$\cos B = \frac{a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$\tan B = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$ctg = \frac{a}{b} = \frac{5}{2\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$$

$$\sec = \frac{a}{c} = \frac{7}{5}$$

$$\csc = \frac{c}{b} = \frac{7}{2\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{12}$$

Ejemplo 9.

Hallar el valor de la hipotenusa c, en el triángulo rectángulo sabiendo que el cateto a = p y el cateto b $= q$

Procedimiento:

Datos:

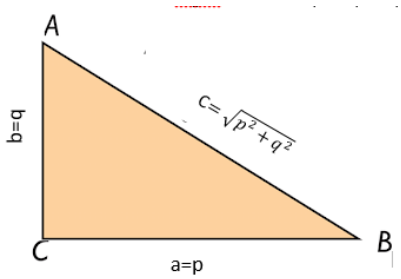
cateto a = p

cateto b = q

hipotenusa c = ?

Resolución:

Paso 1. Se reemplaza el valor de los catetos a y b en la fórmula de Pitágoras.



$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c = \sqrt{p^2 + q^2}$$

Ejemplo 10.

Hallar las funciones trigonométricas del ángulo A, donde la hipotenusa $c = \sqrt{p^2 + q^2}$, el cateto a = p y el cateto b= q

Procedimiento:

Datos:

cateto a = p

cateto b = q

hipotenusa c = $c = \sqrt{p^2 + q^2}$

Resolución:

Paso 1.- Se remplaza los valores de los catetos en cada una de las funciones trigonométricas del ángulo A.

$$senA = \frac{a}{c} = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} \times \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{p^2+q^2}} = \frac{p\sqrt{p^2+q^2}}{p^2+q^2}$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} \times \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{p^2+q^2}} = \frac{q\sqrt{p^2+q^2}}{p^2+q^2}$$

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{p}{q}$$

$$ctgA = \frac{b}{a} = \frac{q}{p}$$

$$\sec A = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{q}$$

$$\csc A = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{p}$$

Ejemplo 11.

Hallar el valor del cateto a dado el valor de la función: $sen\ A = \frac{3}{5}$, y la hipotenusa c= 200.5

Resolución.

Paso 1. Se reemplaza el valor de la función trigonométrica y lo que valor dado de los catetos y se obtiene el resultado.

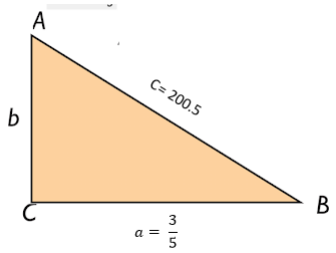


Figura 20. Ejemplo 11.

$$senA = \frac{a}{c}$$
$$\frac{3}{5} = \frac{a}{200.5}$$
$$5a = 601.5$$
$$a = \frac{601.5}{5}$$
$$a = 120.3$$

Ejemplo 12.

Hallar el valor del cateto b, dado el valor de la función: $Cos\ A = \ 0{,}44$, y la hipotenusa c= 30.5

Resolución

Paso 1. Se reemplaza el valor de la función trigonométrica y lo que valor dado de los catetos y se obtiene el resultado.

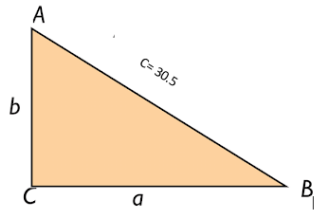


Figura 21. Ejemplo 12.

$$\cos A = \frac{a}{b}$$
$$\frac{0.44}{1} = \frac{b}{30.5}$$
$$b = 13.42$$

Ejemplo 13.

Hallar el valor de la hipotenusa (c), dado el valor de la función: $Tg\ A = \frac{11}{3}$, y el cateto b = $\frac{27}{11}$

Resolución

Paso 1. Se reemplaza el valor de la función trigonométrica y lo que valor dado de los catetos y se obtiene el resultado.

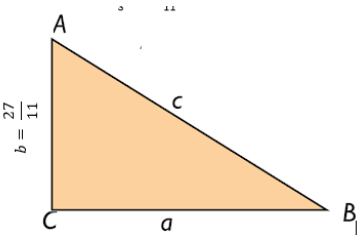


Figura 22. Ejemplo 13.

$$tgA = \frac{a}{b}$$

$$\frac{11}{3} = \frac{a}{27}$$

$$3a = 27$$

$$a = \frac{27}{3}$$

$$a = 9$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{9^2 + \left(\frac{27}{11}\right)^2}$$

$$c = \sqrt{.9.801 + 729}$$

$$c = \sqrt{10.530}$$

$$c = 9\sqrt{130}$$

Ejemplo 14.

Si el cateto b = 2a, hállense las funciones del ángulo A, por qué no aparecen en ellas ni a, ni b

Resolución.

Paso 1. Se reemplaza el valor de los catetos a y b para hallar la hipotenusa c.

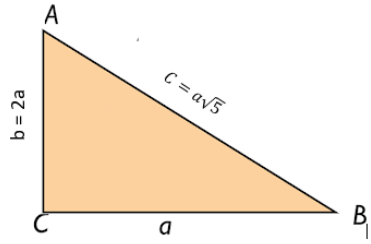


Figura 23. Ejemplo 14.

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c = \sqrt{a^2 + 2a^2}$$
$$c = \sqrt{a^2 + 4a^2}$$
$$c = \sqrt{5a^2}$$
$$c = a\sqrt{5}$$

Paso 2. Los valores completos del cateto a, b y c se reemplaza en el valor de cada función trigonométrica del ángulo A, que se encontrar.

$$senA = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \qquad ctgA = \frac{b}{a} = \frac{2a}{a} = 2$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad \sec A = \frac{c}{b} = \frac{a\sqrt{5}}{2a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$tgA = \frac{a}{b} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \qquad \csc A = \frac{c}{a} = \frac{a\sqrt{5}}{a} = \sqrt{5}$$

Ejemplo 15.

Si un cateto de un triángulo rectángulo es 16 y la ctg del ángulo opuesto = ¾, calcular la longitud del otro cateto.

Procedimiento.

Paso 1. Se reemplaza el valor de los catetos a y b en la función trigonométrica y se calcula el valor del otro cato faltante.

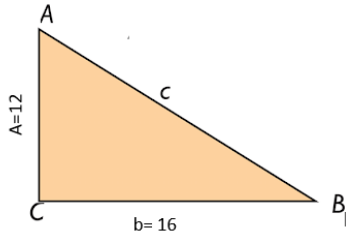


Figura 24. Ejemplo 15.

$$ctg = \frac{a}{b}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{a}{16}$$

$$4a = 48$$

$$a = 12$$

Ejemplo 16.

Si el cateto a = 25, dado ángulo A = 30°, hallar la hipotenusa (c) y el cateto (b) y el ángulo B

Procedimiento para hallar cateto b:

Datos:

ángulo A = 30°

cateto a = 25

cateto b = ?

hipotenusa c = ?

ángulo B = ?

Resolución:

Pasos para hallar el cateto b:

Primer paso: se reemplaza la función tangente del ángulo de 30°

Segundo paso: se despeja el cateto b

Tercer paso: se obtiene el valor del cateto b

$$tg30° = \frac{a}{b}$$
$$b \times tg30° = 25$$
$$b = \frac{25}{tg30°} = \frac{25}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$
$$b = \frac{75}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{75\sqrt{3}}{3}$$
$$b = 25\sqrt{3}$$

Procedimiento para hallar la hipotenusa c:

Primer paso: se reemplaza el valor de los catetos calculados anteriormente:

cateto a = 25,

cateto $b = 25\sqrt{3}$

Segundo paso: se suman el cuadrado de sus catetos

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c = \sqrt{25^2 + \left(25\sqrt{3}\right)^2}$$
$$c = \sqrt{625 + 3(625)}$$
$$c = \sqrt{625 + 1875}$$
$$c = \sqrt{2500}$$
$$c = 50$$

Tercer paso: se obtiene el valor de (c)la hipotenusa

2.6.3 Procedimiento para hallar el ángulo B

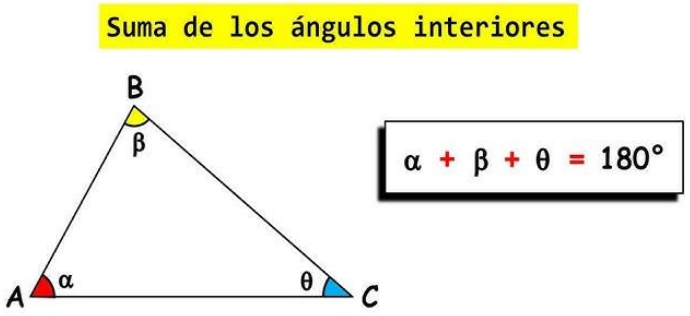


Figura 25. Teorema fundamental del triángulo.

Primer paso: se reemplaza el valor de los ángulos conocidos en el teorema donde la suma de todos los ángulos interiores de los triángulos es igual a 180°.

$$\sum(< A + < B + < C = 180°)$$

Segundo paso: se coloca los ángulos conocidos: ángulo A = 30°, ángulo C = 90°, Sumatoria de ángulos = 180°

Tercer paso: se despeja ángulo en el teorema dado anteriormente.

$$A + B + C = 180°$$
$$B = 180° - 30° - 90°$$
$$B = 60°$$

Ejemplo 17.

Dado ángulo B = 30°, la hipotenusa c = 48, calcular el cateto b, cateto a y el ángulo A.

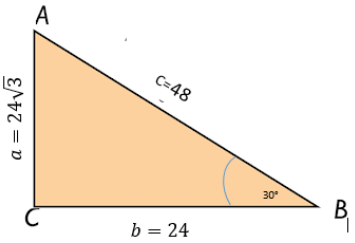


Figura 26. Ejemplo 17.

Procedimiento para hallar el ángulo A:

Resolución:

primer paso: se reemplaza el valor de los ángulos conocidos en el teorema donde la suma de todos los ángulos interiores de los triángulos es igual a 180°.

$$\sum(< A + < B + < C = 180°)$$

se coloca los ángulos conocidos: ángulo B = 30°, ángulo C = 90°, Sumatoria de ángulos = 180°

$$A + B + C = 180°$$
$$A = 180° - 30° - 90°$$
$$A = 60$$

Pasos para hallar el cateto b:

Primer paso: se reemplaza la función seno del ángulo de 60°

$$sen60° = \frac{a}{c}$$
$$a = 48 \times sen60°$$
$$a = \frac{48 \times \sqrt{3}}{2}$$
$$a = 24\sqrt{3}$$

Segundo paso: se despeja el cateto a

Tercer paso: se obtiene el valor del cateto a

Resolución:

Pasos para hallar el cateto b

Se despeja el cateto b en el teorema de Pitágoras.

$$b^2 = c^2 - a^2$$
$$b = \sqrt{48^2 - \left(24\sqrt{3}\right)^2}$$
$$b = \sqrt{2304 - 3 \times 24^2}$$
$$b = \sqrt{2304 - 1728}$$
$$b = \sqrt{576}$$
$$b = 24$$

Ejemplo 18.

Si el cateto b = 20, dado ángulo B = 45°, hallar la hipotenusa (c) y el cateto (a) y el ángulo A

Procedimiento para hallar cateto b:

Datos:

Cateto b = 20

ángulo B = 45°

Procedimiento:

Primer paso: se reemplaza el valor de la tangente del ángulo B = 45° según la definición de su valor determinada en la función y luego en este, se despaja el cateto a que es el valor a buscar.

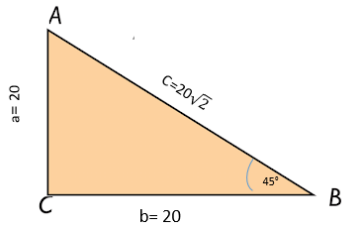


Figura 27. Ejemplo 18.

$$tg45° = \frac{a}{b}$$
$$a \times tg45° = 20$$
$$a = \frac{20}{tg45°} = \frac{20}{1}$$
$$a = 20$$

Procedimiento para hallar la hipotenusa c:

Datos:

Cateto b = 20

Cateto a = 20

Primer paso. - En la fórmula de Pitágoras se reemplazó el valor de los catetos a y b para hallar la hipotenusa c.

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c = \sqrt{20^2 + 20^2}$$
$$c = \sqrt{400 + 400}$$
$$c = \sqrt{800}$$
$$c = 20\sqrt{2}$$

Ejemplo 19.

Cuáles son los ángulos agudos de un triángulo rectángulo si un cateto es $\sqrt{3}$ veces la longitud del otro.

Procedimiento para hallar los ángulos agudos:

Datos:

Cateto a= $\sqrt{3x}$

Cateto b = x

Primer paso. - para encontrar los ángulos agudos de los triángulos siempre se relaciona con el valor de la función tangente y se remplaza los valores del cateto opuesto y el adyacente de los datos

$$tgA = \frac{\sqrt{3x}}{x}$$
$$tgA = \sqrt{3}$$
$$A = tg^{-1}\sqrt{3}$$
$$A = 60°$$

Ejemplo 20.

En un triángulo rectángulo o la longitud de la hipotenusa c = $\sqrt{2}x$ veces la longuitud de uno de los catetos

Procedimiento para hallar los catetos faltantes:

Datos:

Cateto a= x

Hipotenusa c = $\sqrt{2}x$

Cateto b = ?

Primer paso. - En la fórmula de Pitágoras se reemplaza, tanto el valor del cateto (a) como el de la hipotenusa, para hallar el cateto b.

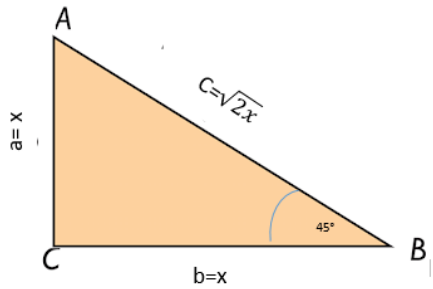


Figura 28. Ejemplo 20.

$$b^2 = c^2 - a^2$$
$$b = \sqrt{\left(\sqrt{2x}\right)^2 - x^2}$$
$$b = \sqrt{2x - x^2}$$
$$b = \sqrt{x^2}$$
$$b = x$$

Procedimiento para hallar los catetos faltantes:

Datos:

Cateto a= x

Hipotenusa c = $\sqrt{2}x$

Cateto b = x

Tercer paso. - para encontrar el ángulo agudo del triángulo, siempre se relaciona con el valor de la función trigonométrica de la tangente y se remplaza los valores del cateto opuesto y el adyacente de los datos.

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{x}{x} = 1$$
$$\tan A = 1$$
$$A = tg^{-1}$$
$$A = 45°$$

Cuarto paso: para hallar el ángulo faltante, se reemplaza el valor de los ángulos conocidos en el teorema donde la suma de todos los ángulos interiores de los triángulos es igual a 180°.

$$\sum(< A + < B + < C = 180°)$$

se coloca los ángulos conocidos: ángulo B = 45°, ángulo C = 90°, Sumatoria de ángulos = 180°

Quinto paso: se encuentra el ángulo faltante B.

$$A + B + C = 180°$$
$$B = 180° - 45° - 90°$$
$$B = 45°$$

Ejemplo 21.

Hallar las funciones trigonométricas dado el cateto $a = \sqrt{m^2 + mn}$ y la hipotenusa $c = m + n$

Procedimiento para hallar el cateto b:

Datos:

Cateto $a = \sqrt{m^2 + mn}$

Hipotenusa $c = m + n$

¿Cateto b =?

Primer paso. - En la fórmula de Pitágoras se reemplaza el valor del cateto (a) y la hipotenusa, para hallar el cateto b.

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{(m+n)^2 - (\sqrt{m^2 + mn}\ )^2}$$

$$b = \sqrt{m^2 + 2mn + n^2 - m^2 - mn}$$

$$b = \sqrt{n(m+n)}$$

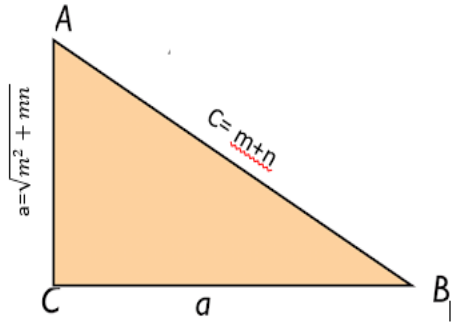


Figura 29. Ejemplo 21.

2.7 Ángulos de cualquier Angulo o magnitud

Para determinar funciones de otros ángulos se hace referencia utilizar la siguiente formula: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, donde (R) corresponde al valor del radio, (Y) al valor de la ordenada y (X) es el valor de la abscisa presente en un plano cartesiano.

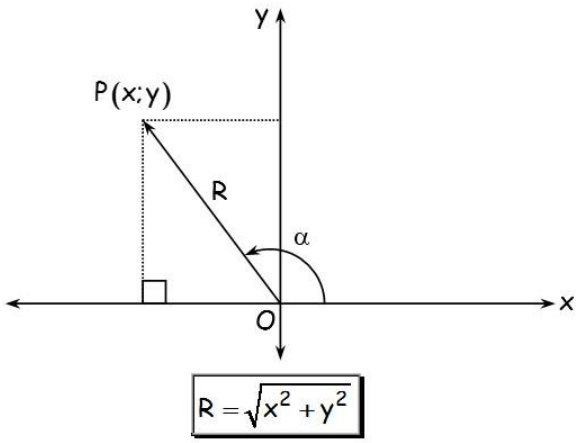


Figura 30. Ángulos de cualquier Angulo o magnitud.

$$\sin xoB = \frac{ordenada}{radio} = \frac{y}{r}$$

$$\cos xoB = \frac{abcisa}{radio} = \frac{x}{r}$$

$$\tan xoB = \frac{ordenada}{abcisa} = \frac{y}{x}$$

$$ctgxoB = \frac{abcisa}{ordenada} = \frac{x}{y}$$

$$\sec xoB = \frac{radio}{abcisa} = \frac{r}{x}$$

$$\csc xoB = \frac{radio}{ordenada} = \frac{r}{y}$$

2.7.1 Ejercicios resueltos para encontrar las funciones trigonométricas de ángulos de cualquier magnitud

Estos ángulos sirven para construir ángulos terminales de funciones trigonométricas de cualquier magnitud de ángulos.

Ejemplo 22.

Dada la función $tgA = \frac{+2}{+3}$ construir los lados terminales de todos los ángulos correspondientes y hallar las funciones de las otras funciones

Procedimiento para construir los lados terminales:

Datos:

Ordenada Y = 2

Abscisa X = 3

Radio =?

Primer paso. - En la fórmula del radio se remplaza los valores dados de la ordenada y la abscisa.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

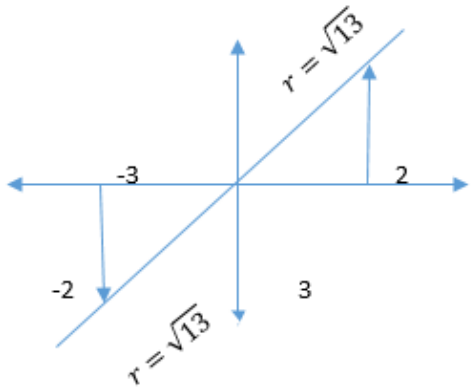


Figura 31. Ejemplo 22.

Segundo paso. - Se reemplaza los valores de la ordenada, abscisa y radio en cada una de las funciones de los ángulos de cualquier magnitud (OXB)

$$sen xoB = \pm \frac{2}{\sqrt{13}} \times \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\cos xoB = \pm \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$tg xoB = \frac{2}{3}$$

$$ctg xoB = \frac{3}{2}$$

$$\sec xoB = \pm \frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$\csc xoB = \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Ejemplo 23.

Dada la función $ctg\ x = \frac{m}{n}$, construir los lados terminales de todos los ángulos correspondientes y hallar las funciones de las otras funciones

Procedimiento para construir los lados terminales:

Datos:

Ordenada Y = n

Abscisa X = m

Radio = ?

Primer paso. - En la fórmula del radio se remplaza los valores dados de la ordenada y la abscisa.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Segundo paso. - Se reemplaza los valores de la ordenada, abscisa y radio en cada una de las funciones de los ángulos de cualquier magnitud (OXB)

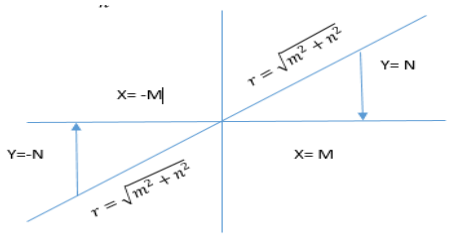


Figura 32. Ejemplo 23.

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$r = \sqrt{m^2 + n^2}$$

$$\sec x = \pm \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{m}$$

$$sen x = \pm \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \times \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{\sqrt{m^2 + n^2}} = \frac{n\sqrt{m^2 + n^2}}{m^2 + n^2}$$

$$\tan x = \frac{+}{+} \frac{n}{m}$$

$$ctg x = \frac{m}{n}$$

$$\sec x \pm \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{m}$$

$$\csc x \pm \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{n}$$

CAPÍTULO III

3 GEOMETRIA ANALITICA

En este capítulo introductorio de la geometría analítica se presentan los conceptos fundamentales necesarios para comprender y aplicar las ecuaciones de la línea recta, el cálculo de distancias y las propiedades básicas de las circunferencias. Cada tema se desarrolla de manera clara y accesible, acompañado de ejercicios ilustrativos que permiten al estudiante recordar y reforzar los criterios esenciales de esta área de estudio.

El propósito central de este capítulo es facilitar la comprensión de los elementos básicos de la geometría analítica, de modo que el estudiante pueda incorporarlos con confianza durante su proceso de formación matemática en la facultad. Las explicaciones se complementan con ejemplos resueltos paso a paso y representaciones gráficas sencillas, lo cual contribuye a una asimilación gradual y adecuada de los conceptos, preparando al lector para abordar contenidos más avanzados en las unidades posteriores.

3.1 Geometría analítica

Para que un problema este resuelto por geometría analítica: se debe usar un sistema condenado para resolverlo muy fácilmente. Aquí el uso de las variables y las constantes sirven para resolver los ejercicios planteados.

En este capítulo deduciremos las ecuaciones de figuras tales como recta, circunferencia, parábolas e hipérbola, estudiando las propiedades de estas figuras a partir de sus ecuaciones, (Londoño & Bedoya, 1992)

- **Variables**: Es un símbolo al cual se le puede asignar diversos valores Por lo general utilizamos las ultimas letras del abecedario.

- **Constantes**: Sus valores son fijos en los cuales se mantiene el mismo valor para todos los ejercicios, son numéricas y arbitraria:

- **Numéricas:** Consideran al mismo valor en todos los problemas.

- **Arbitrianos**: Son aquellos cuyos valores son arbitrianos, pero fijos para cada problema.

3.1.1 Distancia entre dos puntos

Es el valor numérico de la longitud del segmento rectilíneo o también la longitud o posición de una línea recta conformada entre dos puntos o segmentos. (Lehmann, 2017)

- **Incremento de una variable:** Es igual al valor final menos el valor inicial
    - $\Delta z = v_f - v_i$
- **Distancia horizontal:** viene dada entre la abscisa la derecha (-) menos la abscisa izquierda
    - $\Delta x = x_2 - x_1$
- **Pendiente de una recta:** La pendiente entre dos recta está dada por la fórmula:
- $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- **Angulo entre dos rectas:** El ángulo entre 2 rectas se determina utilizando de la siguiente formula:
- $tg = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 - m_1}$

Las pendientes entre dos rectas, se miden de acuerdo al giro de las manecillas del reloj, donde la recta nace el ángulo tiene pendiente (m_1) y la recta mueve el ángulo tiene la $pendiente\ (m_2)$.

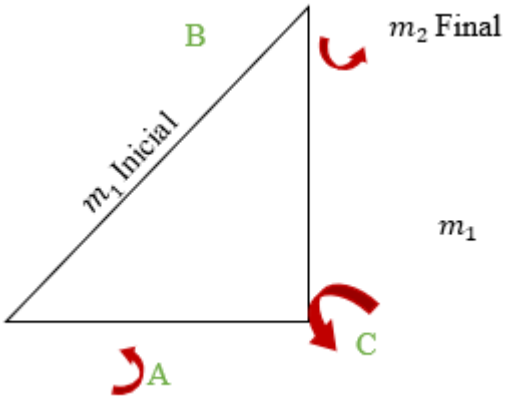


Figura 33. Distancia entre dos puntos.

3.1.2 Ejercicios resueltos de geometría analítica

A continuación, se presentan ejercicios resueltos de Geometría Analítica.

Ejercicios grupo 2, libro de geometría analítica

EJEMPLO 1.

Hallar la distancia del segmento P_1P_2, **cuyos vértices son** $dP_1(-3,-1),\ P_2\ (0,3)$

Paso 1.- Se halla la distancia entre el punto $P_1\ a\ P_2$, utilizando la fórmula de distancia.

$$dP_1P_2 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

Paso 2.- Se reemplaza los valores dados $P_1(\mathbf{-3,-1})$, $P_2\,(\mathbf{0,3})$**,** en la fórmula de las distancias los valores dados de los puntos o segmentos.

$$dP_1P_2 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

$$dP_1P_2 = \sqrt{(0 - (-3))^2 + (3 - (-1))^2}$$

$$dP_1P_2 = \sqrt{(0 + 3)^2 + (3 + 1)^2}$$

$$dP_1P_2 = \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$$

$$dP_1P_2 = \sqrt{9 + 16}$$

$$dP_1P_2 = \sqrt{25}$$

$$dP_1P_2 = 5$$

EJERCICIO 2.

Hallar la distancia del segmento P_1P_2**, cuyos vértices son** $dP_1(\mathbf{4,-1})$, $P_2\,(\mathbf{-3,-1})$

Paso 1.- Se halla la distancia entre el punto $P_1\,a\,P_2$**,** utilizando la fórmula de distancia.

$$dP_1P_2 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

Paso 2.- Se reemplaza los valores dados $P_1(\mathbf{4,-1})$, $P_2\,(\mathbf{-3,-1})$**,** en la formula

$$dP_1P_4$$
$$= \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

$$dP_1P_4$$
$$= \sqrt{[4 - (-3)]^2 + [-1 - (-1)]}$$

$$dP_1P_4$$
$$= \sqrt{(4 + 3)^2 + (-1 + 1)^2}$$

$$dP_1P_4 = \sqrt{(7)^2 + 0}$$

$$dP_1P_4 = \sqrt{49}$$

Demostrar que los puntos (2, -2), (-8, 4), (5, 3) son los vértices de un triángulo y hallar área

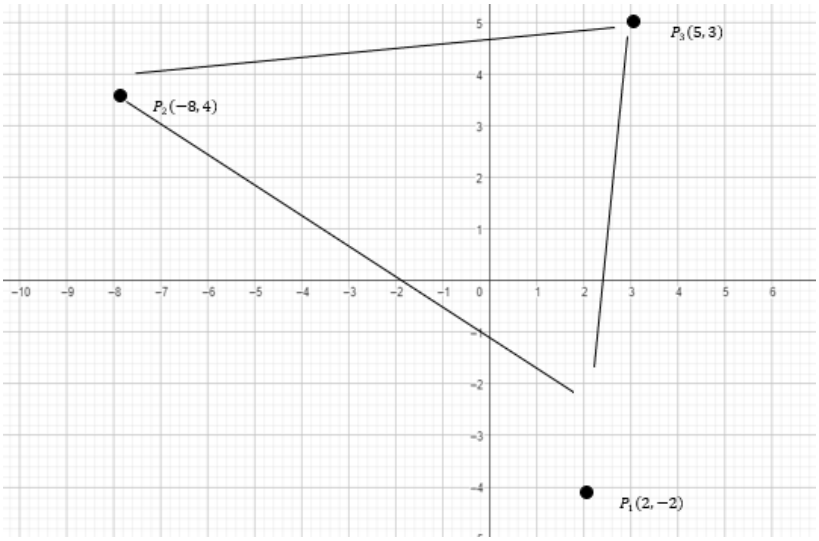


Figura 34. Distancias.

$$dP_1P_2 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

$$dP_1P_2 = \sqrt{(-8 - 8)^2 + (4 + 2)^2}$$

$$dP_1P_2 = \sqrt{(-10)^2 + (6)^2}$$

$$dP_1P_2 = \sqrt{100 + 36}$$

$$dP_2P_3 = \sqrt{(X_3 - X_2)^2 + (Y_3 - Y_2)^2}$$

$$dP_2P_3 = \sqrt{(5 + 8)^2 + (5 - 4)^2}$$

$$dP_2P_3 = \sqrt{(13)^2 + (1)^2}$$

$$dP_2P_3 = \sqrt{169 + 1}$$

$$dP_3P_1 = \sqrt{(X_1 - X_3)^2 + (Y_1 - Y_3)^2}$$

$$dP_3P_1 = \sqrt{(2 - 5)^2 + (-2 - 3)^2}$$

$$dP_3P_1 = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2}$$

$$dP_3P_1 = \sqrt{9 + 25}$$

Figura 35. Distancias.

Formula de distancias

$$dP_2P_3 = \sqrt{(P_1P_2)^2 + (P_1P_3)^2}$$

$$dP_2P_3 = \sqrt{11.66^2 + 5.83^2}$$

$$dP_2P_3 = \sqrt{135.9 + 33.9}$$

$$dP_2P_3 = \sqrt{169.8}$$

$$dP_2P_3 = 13.0$$

Área

$$A = \frac{b \,.\, a}{2}$$

$$A = \frac{P_1P_3 X P_2P_2}{2}$$

$$A = \frac{5{,}83 \; X \; 11{,}66}{2}$$

$$A = 33{,}98$$

El área del triángulo es

33.98

Demostrar que los puntos (12, 1), (-3, -2), (2, -1) son colineales, es decir, que están sobre una misma línea recta

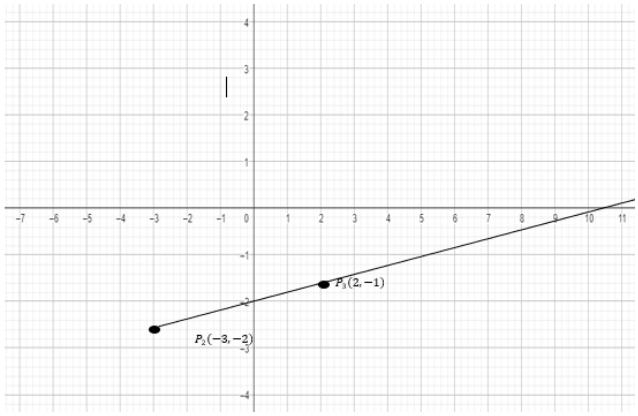


Figura 36. Recta.

Demostrar que los puntos (0, 1), (3, 5), (7,2), (4, -2) son los vértices de un cuadrado

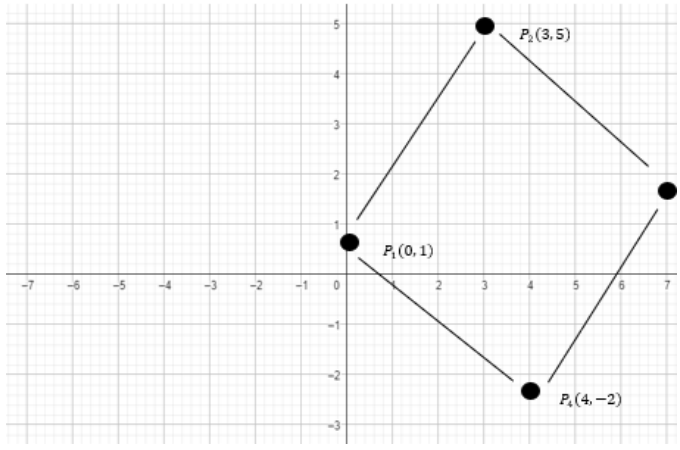


Figura 37. Vértices.

$$dP_1P_2 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

$$dP_1P_2 = \sqrt{(-3 - 12)^2 + (-2 - 1)^2}$$

$$dP_1P_2 = \sqrt{(-15)^2 + (-3)^2}$$

$$dP_1P_2 = \sqrt{225 + 9}$$

$$dP_1P_2 = \sqrt{234}$$

$$dP_1P_2 = 15{,}29$$

$$dP_2P_3 = \sqrt{(X_3 - X_2)^2 + (Y_3 - Y_2)^2}$$

$$dP_2P_3 = \sqrt{(2 + 3)^2 + (-1 + 2)^2}$$

$$dP_2P_3 = \sqrt{(5)^2 + (1)^2}$$

$$dP_2P_3 = \sqrt{25 + 1}$$

$$dP_2P_3 = \sqrt{26}$$

$$dP_2P_3 = 5{,}09$$

$$dP_3P_1 = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2}$$

$$dP_3P_1 = \sqrt{(12 + 1)^2 + (1 + 1)^2}$$

$$dP_3P_1 = \sqrt{(13)^2 + (2)^2}$$

$$dP_3P_1 = \sqrt{169 + 4}$$

$$dP_3P_1 = \sqrt{173}$$

$$dP_3P_1 = 13{,}15$$

Los vértices de un triángulo A (3, 8), B(2, -1) y C(6, -1) si "A" es el punto medio del lado "BC" calcular la longitud de la mediana AD

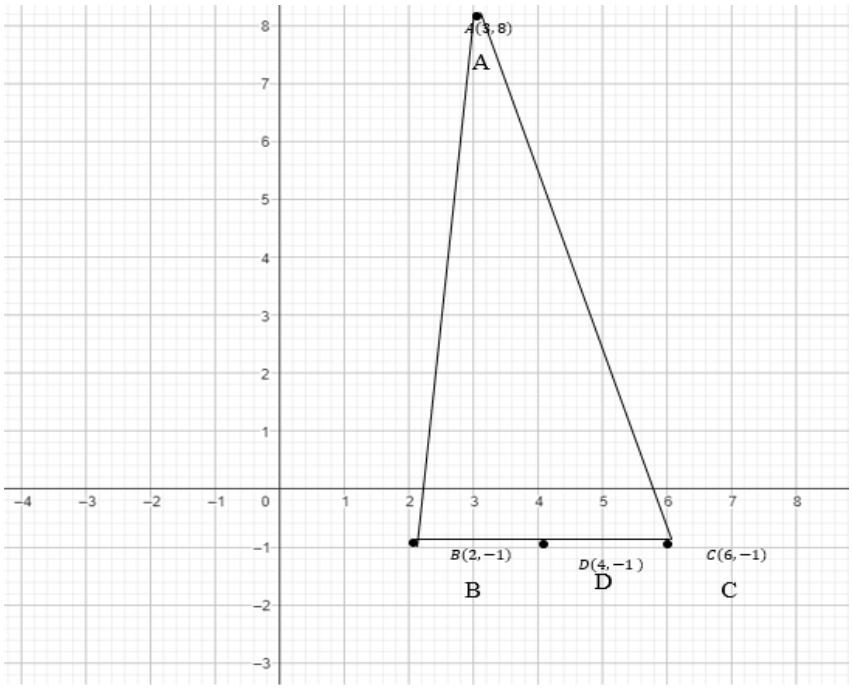


Figura 38. Longitud de la mediana AD.

PM(BC)

$$X = \frac{X_1 + X_2}{2}$$

$$X = \frac{2 + 6}{2} = \frac{8}{2}$$

X= 4

$$Y = \frac{Y_1 + Y_2}{2}$$

$$Y = \frac{-1 - 1}{2} = \frac{2}{2}$$

Y= -1

$$dAD = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

$$dAD = \sqrt{(4 - 3)^2 + (-1 - 8)^2}$$

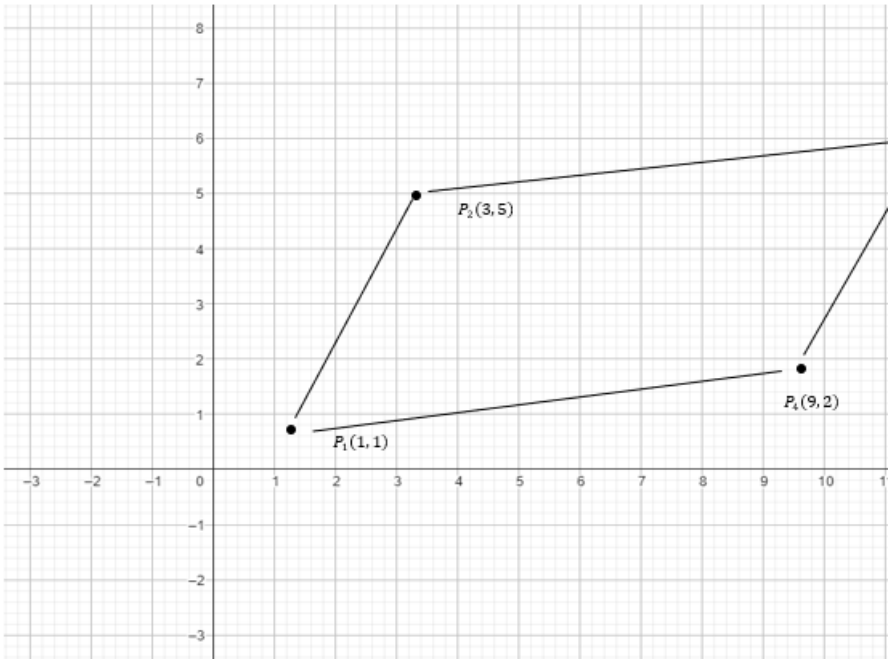
$$dAD = \sqrt{(1)^2 + (-9)^2}$$

$$dAD = \sqrt{1 + 81}$$

$$dAD = \sqrt{82}$$

$$dAD = 9{,}05$$

Demostrar que los puntos (1, 1), (3, 5), (11, 6), (9, 2) son los vértices de un paralelogramo



Si Es Paralelogramo Porque Tiene Sus Lados Paralelos E Iguales De Dos En Dos

$$dP_4P_1 = \sqrt{(X_1 - X_4)^2 + (Y_1 - Y_4)^2}$$

$$dP_4P_1 = \sqrt{(1 - 9)^2 + (1 - 2)^2}$$

$$dP_4P_1 = \sqrt{(8)^2 + (1)^2}$$

$$dP_4P_1 = \sqrt{64 + 1}$$

$$dP_4P_1 = \sqrt{65}$$

$$dP_4P_1 = 8{,}06$$

$$dP_1P_2 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

$$dP_1P_2 = \sqrt{(3-1)^2 + (5-1)^2}$$

$$dP_1P_2 = \sqrt{(2)^2 + (4)^2}$$

$$dP_1P_2 = \sqrt{4+16}$$

$$dP_1P_2 = \sqrt{20}$$

$$dP_1P_2 = 4{,}47$$

$$dP_2P_3 = \sqrt{(X_3 - X_2)^2 + (Y_3 - Y_2)^2}$$

$$dP_2P_3 = \sqrt{(11-3)^2 + (6-5)^2}$$

$$dP_2P_3 = \sqrt{(8)^2 + (1)^2}$$

$$dP_2P_3 = \sqrt{64+1}$$

$$dP_2P_3 = \sqrt{65}$$

$$dP_2P_3 = 8{,}06$$

$$dP_3P_4 = \sqrt{(X_4 - X_3)^2 + (Y_4 - Y_3)^2}$$

$$dP_3P_4 = \sqrt{(9-14)^2 + (2-6)^2}$$

$$dP_3P_4 = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2}$$

$$dP_3P_4 = \sqrt{4+16}$$

$$dP_3P_4 = \sqrt{20}$$

$$dP_3P_4 = 4{,}47$$

Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos (0, 0), (1, 2), (3, -4) sugestión. úsese la segunda formula del apéndice IA, 1.

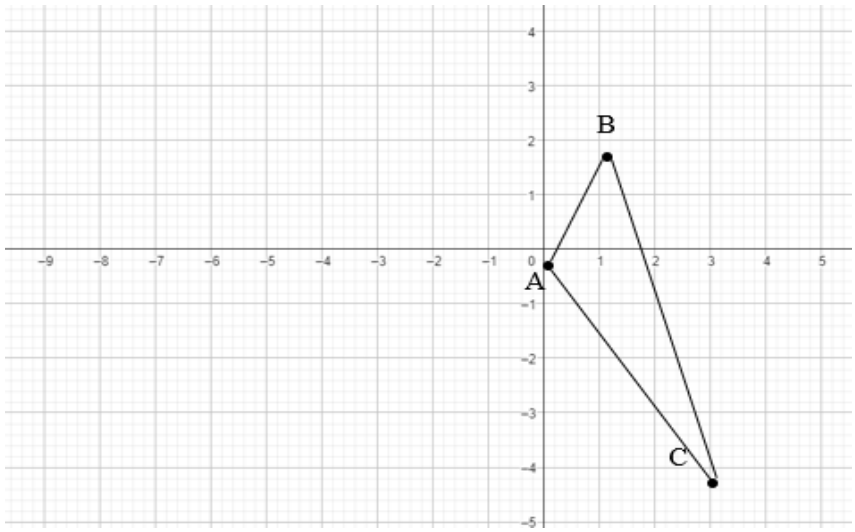


Figura 39. Apéndice IA.

$$dP_1P_2 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$
$$dP_1P_2 = \sqrt{(1 - 0)^2 + (2 - 0)^2}$$
$$dP_1P_2 = \sqrt{1^2 + (2)^2}$$
$$dP_1P_2 = \sqrt{5}$$
$$dP_1P_2 = 2{,}23$$

$$dP_2P_3 = \sqrt{(X_3 - X_2)^2 + (Y_3 - Y_2)^2}$$
$$dP_2P_3 = \sqrt{(3 - 1)^2 + (-4 - 2)^2}$$
$$dP_2P_3 = \sqrt{(2)^2 + (6)^2}$$
$$dP_2P_3 = \sqrt{4 + 36}$$
$$dP_2P_3 = \sqrt{40}$$
$$dP_2P_3 = 6{,}32$$

$$dP_3P_1 = \sqrt{(X_1 - X_3)^2 + (Y_1 - Y_3)^2}$$
$$dP_3P_1 = \sqrt{(0 - 3)^2 + (0 - 4)^2}$$
$$dP_3P_1 = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2}$$
$$dP_3P_1 = \sqrt{9 + 16}$$
$$dP_3P_1 = \sqrt{25}$$
$$dP_3P_1 = 5$$

$$K = \frac{A + B + C}{2}$$
$$K = \frac{2{,}23 + 6{,}32 + 5}{2}$$
$$K = 6{,}77$$

Figura 40. Formulas.

3.1.3 Ejercicios de circunferencias

EJEMPLO 9.

Ejercicio 19: Hallar la reacción de la circunferencia inscrita al triangulo:

A (-1,0) B (2,9/4) C (5,0)

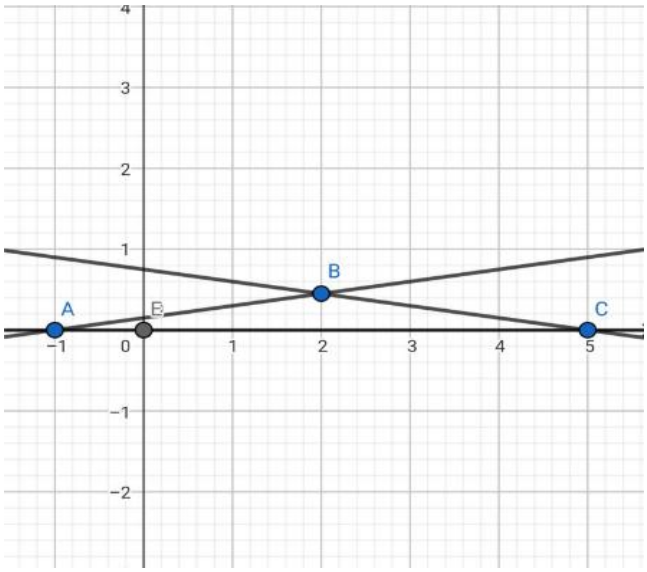


Figura 41. Ejemplo 9.

Punto A (-1, 0)

$$x^2 + y^2 + DX + Ey + F = 0$$
$$(-1)^2 + (0)^2 + (-1)D + Ey + F = 0$$
$$1 + 0 - 1D + 0 + F$$
$$1 - D + F = 0 \ldots . Ecuación 1$$

Punto B $\left(2, \frac{9}{4}\right)$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$(2)^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2 + 2D + \frac{9}{4}E + F = 0$$
$$4 + \frac{81}{16} + 2D + \frac{9}{4}E + F = 0$$
$$\frac{145}{16} + 2D + \frac{9}{4}E + F = 0 \text{..Ecuación 2}$$

$$\text{Punto..} C(5,0)$$
$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$(5)^2 + (0)^2 + 5D + 0 + F = 0$$
$$25 + 0 + 5D + F = 0$$
$$25 + 5D + F = 0 \text{..Ecuación 3}$$

Paso 1. - Para encontrar el valor de D, se cambia de signo la ecuación 1 la ecuación 3, y se resta las letras semejantes:

$$\text{Ecuación 1} - 1(-) \rightarrow 1 - D + F = 0$$
$$\text{Ecuación 3..3}(+) \rightarrow 25 + 5D + F = 0$$

$$-1 + D - F \qquad -1 - (-4 + F)$$
$$25 + 5D + F \qquad -1 - 4 + F$$
$$24 + 6D = -24 \qquad -6 = F$$
$$D = -\frac{24}{6} \qquad F = -5$$
$$D = -4$$

Paso 2. - Para encontrar el valor de F, se reemplaza el valor de la letra D, en la ecuación 1.

D = -4

Ecuación 1.- = -1+D-F

Resultado: **-1 -4-F= 0**

F = 5

Paso 3. - Para encontrar el valor de E, se reemplaza el valor de la letra D Y F, en la ecuación 2 $(\frac{145}{16}+2D+\frac{9}{4}E+F=0..Ecuación.2)$

$$\frac{145}{16}+2(-4)+\frac{9}{4}E+(5)=0$$

Valor de E= 117/16.

CAPÍTULO IV

4 FUNDAMENTOS BÁSICOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL

Este capítulo de Fundamentos del cálculo diferencial presenta un resumen introductorio sobre las variables, funciones y los límites de una función. Los conceptos y ejercicios propuestos están diseñados propuestos como un escenario de aprendizaje para los estudiantes, sirviendo como base para el estudio de los temas diferenciales.

El contenido relacionado con variables, funciones y límites tiene como objetivo facilitar de mejor manera la comprensión de los temas abordados en las siguientes unidades. Los ejemplos se desarrollaron de manera clara y sencilla, acompañados de ejercicios prácticos resueltos e ilustraciones accesibles, lo cual contribuye al logro de los objetivos pedagógicos propuestos.

Este aporte académico busca apoyar el proceso de enseñanza dentro del aula, permitiendo que los estudiantes se familiaricen con los conceptos fundamentales del cálculo diferencial. Este libro, está dirigido especialmente a los estudiantes de primer y segundo nivel de la carrera de Agronomía en la Universidad Técnica de Machala (UTMACH).

4.1 Variables, funciones y limites

4.1.1 Variables

El reconocer cuales son las variables en un ejercicio planteado son de mucha importancia, debido a que durante todo el proceso de enseñanza

de las diferenciales se abordaran ejercicios prácticos, donde se hace necesario aplicar fórmulas para resolver problemas propuestos y el estudiante debe reconocer y diferenciar variables. (Granville W. , 2017)

Concepto. - Es un símbolo al cual se le puede designar distintos valores. Las variables se las reconocen porque son las ultimas letras del alfabeto, van desde la letra (q) hasta la letra (z) y estas pueden estar solas con o sin exponentes que se denominan variables de un monomio cuando la variable está sola, o dos términos juntos encerrados entre paréntesis que se llama variable de un polinomio ejemplos:

Variable de un monomio: $y = x$

Variable de dos monomios exponenciales: $y = (x)^3 - (3x)^2$

Variable de un polinomio: $y = (\boldsymbol{x - 1}).(\boldsymbol{x + 3})$

Variable de un polinomio exponencial: $y = (x-2)^2(3-x)^3$

Variable en Cálculo

Es una cantidad a la que se le puede asignar, durante el curso de un proceso de análisis, un número limitado de valores.

4.1.2 Constantes

Se las designa con las primeras letras del alfabeto desde la letra (a) hasta la letra (p). También son números o símbolos en una ecuación ejemplo: 2, 5, 6, etc.

Intervalo de una variable.

El símbolo [a, b] este se lee intervalo de a y b. Signo a < b se usa para representar todos los valores comprendidos entre ellos.

Variación continua.

Cuando dentro de los intervalos podemos reemplazar todas las variables. Existe una variación continua cuando se puede aplicar todos los datos del intervalo sin restricción. A continuación, se presentará una variación que no es continua.

4.1.3 Variable independientes y dependientes

Variable independiente. - Es la segunda variable a la cual se la puede asignar valores a voluntad dentro de límites que dependen del problema en particular.

Variable dependiente. -Es la primera variante cuyo valor queda fijado cuando se asigna un valor a la variable independiente.

Notación de funciones

Es importante que los estudiantes identifiquen a la función; $f(x)$ como el símbolo que se asigna y se lee f de la variable x, para designar diferentes funciones se cambia la letra inicial $f(x), \theta(x), f'(x)$, etc.

Este símbolo de la función entre paréntesis, significa el valor de la variable a remplazar indicando la misma operación, o conjunto de operaciones, aplicando diversos valores a las variables ejemplo:

Si la función de la variable (x o y), está en el primer miembro, esta se debe reemplazar en la variable dependiente del segundo miembro al cual se va a determinar su valor.

4.1.4 División por cero excluida

Cuando el cociente de dos números a y b es un numero *x* tal que $a = bx$ si $b = 0$ por lo tanto se ve que *x* no existe a menos que $a = 0$ entonces *(x)* puede ser cualquier número.

Ejemplo:

$\frac{a}{0}, \frac{0}{0}$ no carece de sentido.

Se debe tener cuidado de no dividir inadvertidamente por cero. La siguiente paradoja es un ejemplo

$$a = b$$
$$ab = a^2$$
$$ab - b^2 = a^2 - b^2$$
$$b(a-b) = (a+b)(a-b)$$
$$b = \frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)}$$

$$b = a + b$$
$$a = b$$
$$b = a + b$$
$$b = 2b$$
$$1 = 2$$

El resultado absurdo proviene de haber dividido por a – b = 0

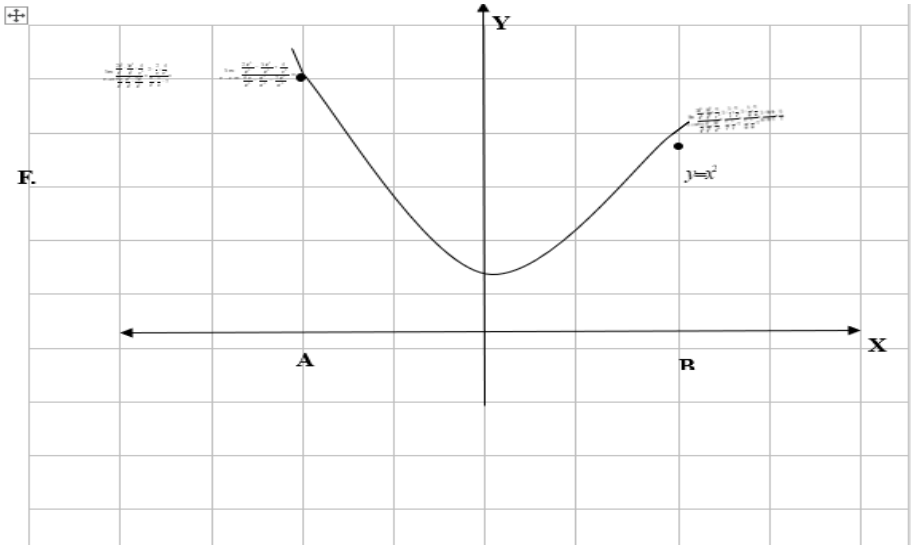


Figura 42. Gráfico de una función continua.

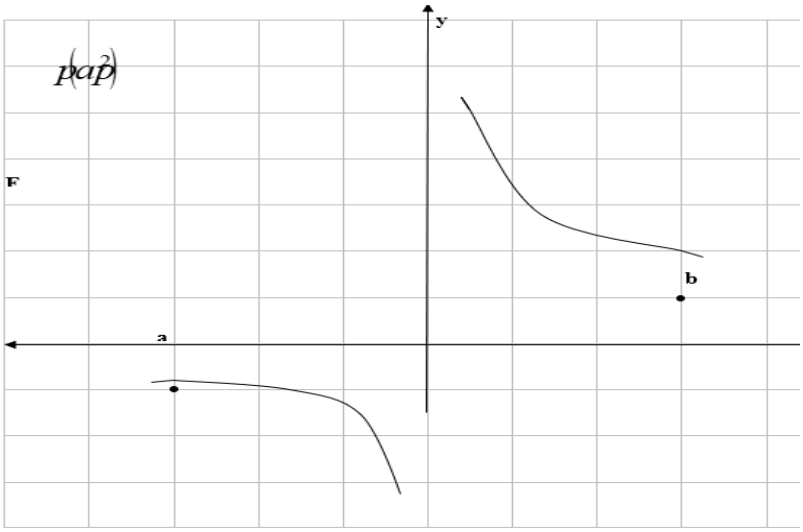


Figura 43. Gráfico de una función discontinua.

4.1.5 Límites de variables

Concepto. - Se dice que una variable (v) tiende a un límite (L), cuando los valores de la variable son tales que el valor numérico de la diferencia (v — L) puede llegar a ser finalmente menor que cualquier número positivo predeterminado tan pequeño cuya relación es V = L.

Los limites tienden a una variable siempre:

$$\textbf{Lim}\ z = f(v)$$

$$v \to \ell$$

$$\textbf{Lim}\ \ z = A$$

$$v \to \ell$$

Grafica de áreas. - La grafica permite conocer los límites de cada figura geométrica representada en un plano de tal manera que se pueda calcular sus áreas o dimensiones.

a = área del circulo

b = área del polígono

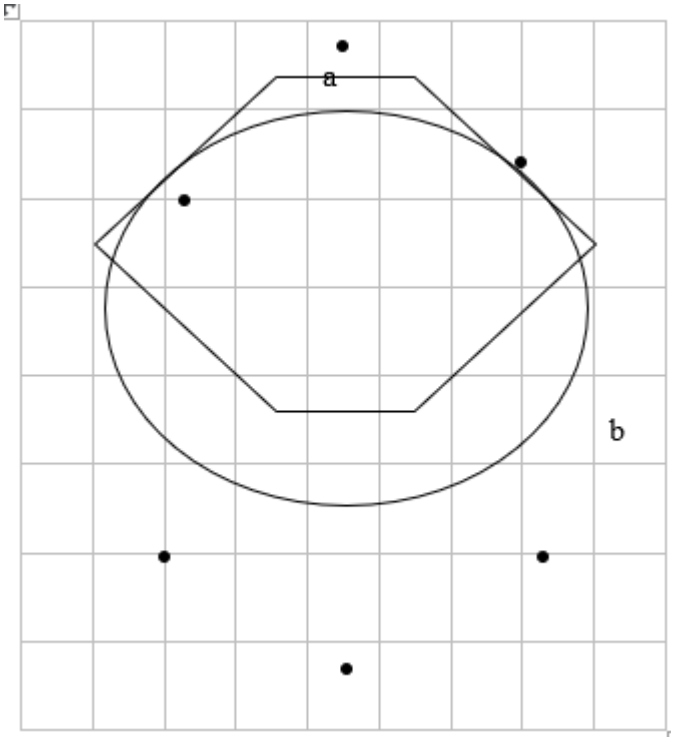


Figura 44. Grafica de áreas.

Teoremas sobre limites

$u = f(x)$; $v = f(x)$; $w = f(x)$

$* \lim_{x \to a} u = A$; $\lim_{x \to a} v = B$; $\lim_{x \to a} w = c$

Límite de una suma de variables:

$* \lim_{x \to a} (u + v + w) = A + B - C$

$* \lim_{x \to a} (u + c) = A + c$

Límite de una división de variables:

$$* \lim_{x \to a} \frac{u}{v} = \frac{A}{B} \qquad B \neq 0$$

$$* \lim_{x \to a} c \cdot u = c.A$$

Escrito en forma de limites **forma abreviada**

$$\lim_{v \to 0} \frac{c}{v} = \infty \qquad \frac{c}{0} = \infty$$

$$\lim_{v \to \infty} c.v = \infty \qquad c \cdot \infty = \infty$$

$$\lim_{v \to \infty} \frac{v}{c} = \infty \qquad \frac{\infty}{c} = \infty$$

$$\lim_{v \to \infty} \frac{c}{o} = 0 \qquad \frac{c}{\infty} = 0$$

Limite cuando es infinito (∞)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \infty$$

4.1.6 Ejercicios resueltos de funciones de variables

Según Granville, (2017) A continuación, se presentan ejercicios resueltos con funciones de las variables.

Ejemplo 1.

Encontrar el valor de la función f x) cuando F(x)= (b+1) en la ecuación $f(x)=x^2+9x+14$.

$$f(x)=x^2+9x+14$$
$$f(b+1)=(b+1)^2+9(b+1)+14$$
$$f(0)=0^2+9(0)+14=14$$
$$f(-1)=(-1)^2-9(-1)+14=24$$
$$f(3)=3^2-9(3)+14=-4$$

Ejemplo 2.

Encontrar el valor de la función f x) cuando F(x)= (1) en la ecuación $f(x)=x^3-5x^2-4x+20$

$$f(1)=(1)^3-5(1)^2-4(1)+20$$

$$=1-5-4+20$$

$$f(1)=12$$

Ejemplo 3.

Encontrar el valor de la función f x) cuando F(x)= (5) en la ecuación $f(x)=x^3-5x^2-4x+20$

$$f(5)=(5)^3-5(5)^2-4(5)+20$$

$$=125-125-20+20$$

$f(5)=0$

Ejemplo 4.

Encontrar el valor de la función f x) cuando F(x)= (0) en la ecuación

$f(x)=x^3-5x^2-4x+20$

$f(0)=(0)^3-5(0)^2-4(0)+20$

$f(5)=+20$

Ejemplo 5.

Encontrar el valor de la función f x) cuando F(x)= (7) en la ecuación

$f(x)=x^3-5x^2-4x+20$

$f(7)=7^3-5(7)^2-4(7)+20=90$

Ejemplo 6.

Encontrar el valor de la función f x) cuando F(x)= (-1) en la ecuación

$f(x)=x^3-5x^2-4x+20$

$f(-1)=\left[(-1)^3-5(-1)^2-4(-1)+20\right]$

$=\left[-1-5+4+20\right]=18$

Ejemplo 7.

Encontrar el valor de la función dado $f(y)=y^2-2y+6$; donde la variable y= $f(y+h)$demostrar que $f(y+h)=y^2-2y+6+2(y-1)h+h^2$

Paso 1.- reemplazar el valor de la función dada en cada variable del segundo miembro $f(y+h)=(y+h)^2-2(y+h)+6$

Paso 2.- se resuelve el binomio de cuadrado perfecto y se destruye los paréntesis en cada variable del segundo miembro: $f(y+h)=(y+h)^2-2(y+h)+6$

$=y^2+2hy+h^2-2y-2h+6$

Paso 3.- se resuelve el binomio de cuadrado perfecto y se destruye los paréntesis en cada variable del segundo miembro

$=y^2-2y+6+2(y-1)h+h^2$

Ejemplo 8.

Encontrar el valor de la función; dado $f(x)\frac{1}{x}$ demostrar que $f(x+h)-f(x)=-\frac{h}{x^2+xh}$

Paso 1.- reemplazar el valor de la función dada en cada variable del segundo miembro

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}$$

Paso 2.- se saca mínimo común de los denominadores

$$\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}$$

Paso 3.- se resuelve el numerador sumando y restando términos semejantes en cada variable del segundo miembro y se haya el valor de la función.

$$\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}=\frac{x-x-h}{x^2+hx}=-\frac{h}{x^2+xh}$$

Ejemplo 9.

Encontrar el valor de la función; dado que la $f(0)=sen2\theta+\cos\theta$

Paso 1.- reemplazar el valor de la función dada en cada variable del segundo miembro

$$f(0)=sen2(0)+\cos 0=sen0+\cos 0=0+1=1$$

Ejemplo 10.

Encontrar el valor de la función; dado que la $f\left(\pi/2\right)=sen2\theta+\cos\theta$

Paso 1.- reemplazar el valor de la función dada en cada variable del segundo miembro y se reemplaza el valor de cada ángulo.

$$f\left(\pi/2\right)=sen2\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos\frac{\pi}{2}=sen\pi+\cos\frac{\pi}{2}=0+0=0$$

Ejemplo 11.

Encontrar el valor de la función; dado que la $f(\pi)=sen2\pi+\cos\pi$

Paso 1.- reemplazar el valor de la función dada en cada variable del segundo miembro y se reemplaza el valor de cada ángulo.

$$f(\pi)=sen2\pi+\cos\pi=0+(-1)=-1$$

Ejemplo 12.

Encontrar el valor de la función; dado $\phi(x)=\log\frac{1-x}{1+x}$ demostrar $\phi(y)+\phi(z)=\frac{\phi(y+z)}{(1+yz)}$

Procedimiento.

Paso 1.- reemplazar el valor de la función dada en cada variable del segundo miembro

$$= \log\left(\frac{1-y}{1+y}\right) + \log\left(\frac{1-z}{1+z}\right) = \log \frac{1-\dfrac{y+z}{1+yz}}{1+\dfrac{y+z}{1+yz}}$$

$$\log\left(\frac{1-y}{1+y}\right)\cdot\left(\frac{1-z}{1+z}\right) = \log \frac{\dfrac{1+yz-y-z}{1+yz}}{\dfrac{1+yz+y+z}{1+yz}}$$

$$\log\frac{1+yz-y-z}{1+yz+y+z} = \log\frac{1+yz-y-z}{1+yz+y+z}$$

4.2 Límite de una función

Ejemplo 14.

Hallar el límite de la variable x; cuando X= 2.

$f(x).x^2 -.\frac{x}{2}$ Lim.

$f(x) = A$

$x \to 2$ $x \to a$

Lim. $f(x)$

PASO 1.- Se reemplaza el valor de la variable en la función: =

$2^2 - \frac{2}{2} = 4 - 1 = 3$

4.2.1 Funciones continuas y discontinuas

Ejemplo 15.

Hallar el límite de la variable x; cuando X= 2

$$\lim_{x \to 2} \left(x^2 + 4x\right) = 12$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) x = a$$

Paso 1.- Se reemplaza el valor de la variable en la función:

$$= 2^2 + 4 \cdot 2 = 4 + 8 = 12$$

Ejemplo 16.

Hallar el límite de la variable x; cuando $\lim_{x \to 2} f(x) - \left(\frac{x^2 - 4}{x - 2}\right)$

Planteamiento:

Paso 1.- Se reemplaza el valor de la variable en la función y se resuelve el caso de factores (binomio de cuadrado perfecto).

$$\lim_{x \to 2} f(x) - \left(\frac{x^2 - 4}{x - 2}\right)$$

$$\lim_{x \to 2} \left[\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}\right] = \lim_{x+2} x + 2 = 2 + 2 = 4$$

Ejemplo 17.

Hallar el límite de la variable x; cuando $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^3 - 3x^2 + 4}{5x - x^2 - 7x^3}\right) = \frac{-2}{7}$

Planteamiento:

Paso 1.- Se divide cada término para la variable de mayor grado, para el ejemplo (X^3)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3} + \frac{4}{x^3}}{\frac{5x}{x^3} - \frac{x^2}{x^3} - \frac{7x^3}{x^3}} =$$

Paso 2. Se simplifica el numerador y el denominador las variables iguales.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3} + \frac{4}{x^3}}{\frac{5x}{x^3} - \frac{x^2}{x^3} - \frac{7x^3}{x^3}} = \frac{2 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^3}}{\frac{5}{x^2} - \frac{1}{x} - 7} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3} + \frac{4}{x^3}}{\frac{5x}{x^3} - \frac{x^2}{x^3} - \frac{7x^3}{x^3}} = \frac{2 - \frac{3}{\infty} + \frac{4}{\infty}}{\frac{5}{\infty} - \frac{1}{\infty} - 7} = \frac{2 - 0 + 0}{0 - 0 - 7} = \frac{-2}{7}$$

Ejemplo 18.

Hallar el límite de la variable (t); cuando tiende a cero (0).

Planteamiento:

Paso 1.- Se reemplaza en la variable (t) el valor (0) y se obtiene el resultado

$$\lim_{t \to 0} \frac{4t^2 + 3t + 2}{t^2 + 2t - 6} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{4(0) + 3(0) + 2}{0 + 2(0) - 6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Ejemplo 19.

Hallar el límite de la variable (k); cuando tiende a cero (0)

Planteamiento:

Paso 1.- Se reemplaza en la variable (k) el valor (0) y se obtiene el resultado

$$\lim_{k \to 0} \frac{(2z + 3k)^3 - 4k^2 z}{2z(2z - k)^2} = 1$$

$$\frac{(2z + 3(0))^3 - 4(0)^2 z}{2z(2z - 0)^2} = \frac{8z^3}{8z^3} = 1$$

$$\frac{(2z)^3 - 0}{2z(2z)^2} = \frac{8z^3}{2z \cdot 4z^2} = \frac{8z^3}{8z^3}$$

Ejemplo 20.

Hallar el límite de la variable (x); cuando tiende a infinito

Planteamiento:

Paso 1.- Se divide cada término para la variable de mayor grado, para el ejemplo (X^5)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{a.x^4}{x^5} + \frac{bx^2}{x^5} + \frac{c}{x^5}}{\frac{dx^5}{x^5} + \frac{cx^3}{x^5} + \frac{x.x}{x^5}} =$$

Paso 2.- Se simplifica las variables del numerador con las variables del denominador (x)

$$\lim_{x \to \infty} = \frac{\frac{a}{x} + \frac{b}{x^3} + \frac{c}{x^5}}{d + \frac{c}{x^2} + \frac{1}{x^4}} = \frac{\frac{a}{\infty} + \frac{b}{\infty} + \frac{c}{\infty}}{d + \frac{c}{\infty^2} + \frac{x}{\infty^4}}$$

Paso 3.- Se remplaza en cada variable (x) por el límite tanto en el numerador con las variables del denominador (x)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{a.x^4}{x^5} + \frac{bx^2}{x^5} + \frac{c}{x^5}}{\frac{dx^5}{x^5} + \frac{cx^3}{x^5} + \frac{x.x}{x^5}} = \frac{\frac{a}{x} + \frac{b}{x^3} + \frac{c}{x^5}}{d + \frac{c}{x^2} + \frac{1}{x^4}} = \frac{\frac{a}{\infty} + \frac{b}{\infty} + \frac{c}{\infty}}{d + \frac{c}{\infty^2} + \frac{x}{\infty^4}}$$

Paso 4.- Se obtiene el resultado

$$\lim_{x \to \infty} = \frac{0+0+0}{d+0+0} = \frac{0}{d} = 0$$

4.3 Derivación por medio de la regla general

Las funciones dentro de las derivadas están relacionadas de tal manera que el valor de la primera queda determinado si se da un valor a la segunda, entonces se dice que la primera es función de la segunda.

Derivación

$y = f(x)$
$y = x^2$

$x = 2$
$x = 2.1$
$x = 2{,}2$

$y = x^2$
$y = 4$
$y = 4{,}41$
$y = 4{,}84$

Incremento

$\mathbf{y} = x^2$

$\Delta x = v_F - v_I$
$= 2.1 - 2 = 0{,}1$

$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$
$y + \Delta y = x^2 - 2x\Delta x + (\Delta x)$

$-y \quad = -x^2$

$\Delta y = 4{,}41 - 4 = 0{,}41$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

Decremento

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

$\Delta x = 1{,}8 - 2 = -0{,}2$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2(2) + 0{,}1 = 4{,}1$$

4.4 Regla general de derivación

La regla indica que para cuando se deriva utilizando la regla general es a través de los incrementos de las variables ejemplo sean estas X o Y, el incremento se reemplaza por $(\Delta x; \Delta y)$

La variable Y se reemplaza por Y= $(y + \Delta y)$

La variable X se reemplaza por X= $(x + \Delta x)$

Ejemplo 1.

Derivar por la formula general: $y = f(x)$

Paso 1. Se reemplaza en las variables X y Y el valor de los incrementos en las dos variables.

$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

Paso 2. Una vez reemplazado el valor de los incrementos Δx ; Δy en las variables luego a la función original se le resta el cambio de la variable a través de los incrementos.

$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

$$-y \quad -f(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Paso 3. Una vez reemplazado el valor de los incrementos Δx; Δy, a los incrementos se le aplica los límites de lasa variable X y queda planteado ya el ejercicio por medio de la derivada de una función.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \textbf{derivada de función}$$

4.4.1 Representación de la derivada

La derivada es representada por una función de la variable ejemplos:

$y = f(x)$
$\frac{dy}{dx}$
y'

$f(x) = 3x^2 - 7x + 5$
$f'(x)$

$s = sen\theta$
$\frac{ds}{d\theta}$

Ejemplo 2.

Hallar la derivada por medio de la formula general el valor de la función **a resolver** $y = 3x^2 + 5$

Paso 1. Se reemplaza en las variables X y Y el valor de los incrementos

$y = f(x)$
$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

Paso 2. Una vez reemplazado el valor de los incrementos Δx; Δy en las variables luego a la función original se le resta el cambio de la variable a través de los incrementos.

$$y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + 5$$
$$= 3\left(x^2 + 2x\Delta x + 2x^{-2}\right) + 5$$
$$y + \Delta y = 3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^{-2} + 5$$

$$-y \qquad = -3x^2 - 5$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6\Delta x(x) + 3\Delta x^{-2}}{\Delta x}$$

Paso 3. Una vez reemplazado el valor de los incrementos Δx; Δy se hace supresión de términos semejantes:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x$$

Paso 4. Se reemplaza en el valor de los incrementos el valor de los limites cuando este tiende a cero y este es el resultado.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3(0)$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x$$

La Derivada por medio de la formula general es: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x$

Ejemplo 3.

Hallar la derivada por medio de la formula general el valor de la función

$$y = \frac{c}{x^2}$$

Paso 1. Se reemplaza en las variables X y Y el valor de los incrementos en la función a resolver:

$$y = \frac{c}{x^2}$$

$$y + \Delta y = \frac{c}{(x + \Delta x)^2}$$

Paso 2. Una vez reemplazado el valor de los incrementos Δx; Δy en las variables luego a la función original se le resta el cambio de la variable a través de los incrementos.

$$y + \Delta y = \frac{c}{(x + \Delta x)^2}$$

$$-y \qquad = -\frac{c}{x^2}$$

Paso 3. Una vez reemplazado el valor de los incrementos Δx; Δy se hace supresión de términos semejantes:

$$\Delta y = \frac{c}{(x + \Delta x)^2} - \frac{c}{x^2} = \frac{cx^2 - c\left(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^{-2}\right)}{x^2(x + \Delta x)^2}$$

$$\Delta y = \frac{x^2 - cx^2 - 2cx\Delta x - c\Delta x^{-2}}{x^2(x + \Delta x)} = \frac{-c\Delta x(2x + \Delta x)}{x^2(x + \Delta x)^2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-c\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x)}{x^2(x + \Delta x)^2\cancel{\Delta x}}$$

Paso 4. Se reemplaza en el valor de los incrementos el valor de los limites cuando este tiende a cero y este es el resultado.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-c(2x+0)}{x^2(x+0)^2} = \frac{-2cx}{x^4} = \frac{-2c}{x^3}$$

La Derivada por medio de la formula general es: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2c}{x^3}$.

El estudiante reconocerá y distinguirá variables y constantes, así como la correcta multiplicación de factores. Asimismo, identificará los conceptos básicos de límites y las fórmulas empleadas en la resolución de ejercicios, comprendiendo los pasos necesarios para aplicar la fórmula general de las derivadas en el desarrollo de ejercicios de Cálculo Diferencial.

4.5 Derivación

4.5.1 derivada de una función

La derivada de una función, comprende el primer término la función y después del igual a la función derivable a la cual se va a encontrar su valor aplicando las fórmulas de derivación.

En este apartado los estudiantes pueden revisar los ejercicios del libro utilizado para la catedra de Calculo Diferencial en la FCA (GRANVILLE).

El abordaje que se hace es de manera sencilla tratando de que el primer lugar el alumno memorice las formula, analice el ejercicio separando si es variable o constante, si es suma, multiplicación, división la derivada

a la cual va a plicar las formula que desde su formulario personal aplicará.

En los siguientes ejercicios hallar la derivada (libro de Granville).

Ejemplo 1.- Hallar la derivada de la función $y = x^2\sqrt{1+x^3}$

Paso 1. Se reconoce la formula a aplicar en la función.

$$\text{Formula: } \frac{dy}{dx}(u.v) = u.dv + vdu$$

Paso 2. Se escoge la formula

$u = x^2$

$v = \sqrt{1+x^3}$

Paso 3. Se reemplaza en la formula

$y = x^2\sqrt{1+x^3}$

$y = udv + vdu$

Paso 4. Se reemplaza en la formula y se procede a resolver de la

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \left[\frac{1}{2}\left(1+x^3\right)^{-1/2} \cdot \left(3x^2\right)\right] + \left(1+x^3\right)^{1/2} \cdot (2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3X^4}{2(1+X^3)^{1/2}} + 2X(1+X^3)^{1/2}$$

siguiente manera: *MCD.*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3X^4 + (2X(1+X^3)^{1/2})^2}{2(1+X^3)^{1/2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3X^4 + 4X(1+X^3)}{2(1+X^3)^{1/2}}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{3X^4 + 4X + 4X^4}{2(1+X^3)^{1/2}}$$

Ejemplo 2.

Resolver el siguiente ejercicio**:** $y = u^6$

Paso 1. Se reconoce la formula a aplicar en la función.

Formula: $\frac{dy}{dx}(v^n) = n.v^{n-1}\frac{dv}{dx}$

Paso 2. Se reconoce la formula a aplicar en la función en este caso en una variable a una potencia.

$$y = u^6$$

$$\frac{dy}{dx} = n.v^{n-1}dv$$

$$\frac{dy}{dx} = 6.u^{6-1}d(u).$$

$$\frac{dy}{dx} = 6.u^5$$

Ejemplo 3.

Resolver el siguiente ejercicio**:** $y = \frac{a-u}{a+u}$

Paso1. Se escoge la formula a aplicar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u}{v}$$

Paso2. Se escoge la formula a aplicar y se desarrolla el ejercicio

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(a+u)\cdot(-1)-(a-u)(1)}{(a+u)^2}$$

$$dy = \frac{-a-u-a+u}{(a+u)^2}$$

$$dy = \frac{-2a}{(a+u)^2}$$

Ejemplo 4.

Resolver el siguiente ejercicio**:** $y = x^3$

Paso 1. Se reconoce la formula a aplicar en la función.

$$\text{Formula: } \frac{dy}{dx}(v^n) = n.v^{n-1}\frac{dv}{dx}$$

Paso 2. Se reconoce la formula a aplicar en la función en este caso en una variable a una potencia

$$y = x^3$$
$$\frac{dy}{dx} = n.v^{n-1}dv$$
$$\frac{dy}{dx} = 3.x^{3-1}d(x).$$
$$\frac{dy}{dx} = 3.x^2$$

Ejemplo 5.

Resolver el siguiente ejercicio**:** $y = (x^2 - 3)^5$

Paso 1. Se reconoce la formula a aplicar en la función.

$$\text{Formula: } \frac{dy}{dx}(v^n) = n.v^{n-1}\frac{dv}{dx}$$

Paso 2. Se reconoce la formula a aplicar en la función en este caso en una variable a una potencia.

$$y = (x^2 - 3)^5$$
$$\frac{dy}{dx} = n.v^{n-1}dv$$
$$\frac{dy}{dx} = 5.(x^2 - 3)^{5-1}d(x^2 - 3).$$
$$\frac{dy}{dx} = 5(x^2 - 3)^4(2x - 0)$$
$$\frac{dy}{dx} = 10x(x^2 - 3)^4$$

Ejemplo 5.

Resolver el siguiente ejercicio**:** $y = x^{\frac{4}{3}} + 5$

Paso 1. Se reconoce la formula a aplicar en la función.

$$\text{Formula: } \frac{dy}{dx}(v^n) = n.v^{n-1}\frac{dv}{dx}$$

Paso 2. Se reconoce la formula a aplicar en la función en este caso en una variable a una potencia más una constante.

$$y = x^{\frac{4}{3}} + 5$$
$$\frac{dy}{dx} = n.v^{n-1}dv + d(c)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}(x)^{\frac{4}{3}-\frac{3}{3}} + 0$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}.x^{\frac{1}{3}}$$

Ejemplo 6.

Resolver el siguiente ejercicio**:** $y = (2-3t^2)^3$

Paso 1. Se reconoce la formula a aplicar en la función.

$$\text{Formula: } \frac{dy}{dx}(v^n) = n.v^{n-1}\frac{dv}{dx}$$

Paso 2. Se reconoce la formula a aplicar en la función en este caso en una variable a una potencia

$$y = (2 - 3t^2)^3$$
$$\frac{dy}{dx} = n.v^{n-1}dv + d(c)$$
$$\frac{dy}{dx} = 3(2 - 3t^2)^{3-1}d(2 - 3t^2)$$
$$\frac{dy}{dx} = 3(2 - 3t^2)^2(-6t)$$
$$\frac{dy}{dx} = -18t(2 - 3t^2)^2$$

Ejemplo 7.

Resolver el siguiente ejercicio**:** $y = \sqrt{a^2 - x^2}$

Paso 1. Se reconoce la formula a aplicar en la función.

Formula: $\frac{dy}{dx}(v^n) = n.v^{n-1}\frac{dv}{dx}$

Paso 2. Se reconoce la formula a aplicar en la función en este caso en una variable a una potencia

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$
$$\frac{dy}{dx} = n.v^{n-1}dv + d(c)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}}.d(a^2 - x^2)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.(-2x)$$
$$\frac{dy}{dx} = --\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Ejemplo 8.

Resolver el siguiente ejercicio**:** $y = (x^2 - 3)^2$

Paso 1. Se reconoce la formula a aplicar en la función.

$$\text{Formula: } \frac{dy}{dx}(v^n) = n.v^{n-1}\frac{dv}{dx}$$

Paso 2. Se reconoce la formula a aplicar en la función en este caso en una variable a una potencia.

$$y = (x^2 - 3)^2$$
$$\frac{dy}{dx} = n.v^{n-1}dv$$
$$\frac{dy}{dx} = 2(x^2 - 3)^{2-1}d(x^2 - 3).$$
$$\frac{dy}{dx} = 2(x^2 - 3)(2x - 0)$$
$$\frac{dy}{dx} = 6x(x^2 - 3)$$

Se sugiere que cada estudiante realice ejercicios de forma individual, repitiendo la misma fórmula de tal manera que dentro su la clase le sea fácil reconocerla.

Ejemplo 9.

Resolver el siguiente ejercicio**:** $y = \frac{ax}{x^2 + a^2}$

Paso1. Se escoge la formula a aplicar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u}{v}$$

Paso2. Se escoge la formula a aplicar y se desarrolla el ejercicio

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + a^2)a - ax(2x + 0)}{(x^2 + a^2)^2}$$
$$dy = \frac{ax^2 + a^3 - 2ax^2}{(x^2 + a^2)^2}$$
$$dy = \frac{a^3 - ax^2}{(x^2 + a^2)^2}$$

Ejemplo 10.

Resolver el siguiente ejercicio**:** $y = 2px$

Paso 1. Se reconoce la formula a aplicar en la función.

Formula: $\frac{dy}{dx}(c.v) = c.dv$

Paso 2. Se reconoce la formula a aplicar en la función en este caso en una constante por un variable.

$$y = 2px$$
$$\frac{dy}{dx} = c.dv$$
$$\frac{dy}{dx} = 2p.d(x)$$
$$\frac{dy}{dx} = 2p$$

Ejemplo 11.

Resolver el siguiente ejercicio**:** $y = ax^4 - bx^3$

Paso 1. Se reconoce la formula a aplicar en la función.

$$\text{Formula: } \frac{dy}{dx}(c.v) = c.dv$$

Paso 2. Se reconoce la formula a aplicar en la función en este caso en una constante por una variable

$$y = ax^4 - bx^3$$
$$\frac{dy}{dx} = c.v^n$$
$$\frac{dy}{dx} = a.4x^3 - 3bx^2$$
$$\frac{dy}{dx} = 4ax^3 - 3bx^2$$

Ejemplo 12.

Resolver el siguiente ejercicio**:** $y = (a - b/x)^2$

Paso 1. Se reconoce la formula a aplicar en la función.

$$\text{Formula: } \frac{dy}{dx}(v^n) = n.v^{n-1}\frac{dv}{dx}$$

Paso 2. Se reconoce la formula a aplicar en la función en este caso en una variable a una potencia.

$$y = (a - \frac{b}{x})^2$$
$$\frac{dy}{dx} = n.v^{n-1}dv$$
$$\frac{dy}{dx} = 2(a - \frac{b}{x})^{2-1} d(a - \frac{b}{x}).$$
$$\frac{dy}{dx} = 2(a - \frac{b}{x})(-\frac{-b}{x^2})$$
$$\frac{dy}{dx} = 2(\frac{b}{x^2})(a - \frac{b}{x})$$

Ejemplo 13.

Resolver el siguiente ejercicio**:** $y = 2(x^2 - b)$

Paso 1. Se reconoce la formula a aplicar en la función.

Formula: $\frac{dy}{dx}(c.v) = c.dv$

Paso 2. Se reconoce la formula a aplicar en la función en este caso en una constante por un variable.

$$y = 2(x^2 - b)$$
$$\frac{dy}{dx} = c.dv$$
$$\frac{dy}{dx} = 2.d((x^2 - b))$$
$$\frac{dy}{dx} = 2(2x - 0)$$
$$\frac{dy}{dx} = 4x$$

Ejemplo 14.

Resolver el siguiente ejercicio: $y = \frac{x^2}{x+a}$

Paso1. Se escoge la formula a aplicar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u}{v}$$

Paso2. Se escoge la formula a aplicar y se desarrolla el ejercicio

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+a)2x - x^2(1)}{(x+a)^2}$$

$$dy = \frac{2x^2 + 2ax - x^2}{(x+a)^2}$$

$$dy = \frac{x^2 + 2ax}{(x+a)^2}$$

Ejemplo 15.

Resolver el siguiente ejercicio: $y = \frac{x^2}{x^2 + a^2}$

Paso1. Se escoge la formula a aplicar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u}{v}$$

Paso2. Se escoge la formula a aplicar y se desarrolla el ejercicio, considerando el numerador y el denominador

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + a^2)2x - x^2(2x)}{(x^2+a^2)^2}$$

$$dy = \frac{2x^3 + 2a^2x - 2x^3}{(x^2+a^2)^2}$$

$$dy = \frac{2a^2x}{(x^2+a^2)^2}$$

Ejemplo 16.

Resolver el siguiente ejercicio**:** $s = (a + bt)^2$

Paso 1. Se reconoce la formula a aplicar en la función.

$$\text{Formula: } \frac{dy}{dx}(v^n) = n.v^{n-1}\frac{dv}{dx}$$

Paso 2. Se reconoce la formula a aplicar en la función en este caso en una variable a una potencia.

$$y = (a + bt)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = n.v^{n-1}dv$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(a + bt).(b)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2b(a + bt).$$

Ejemplo 17.

Resolver el siguiente ejercicio**:** $s = \sqrt{a + bt}$

Paso 1. Se reconoce la formula a aplicar en la función.

Formula: $\frac{dy}{dx}(v^n) = n.v^{n-1}\frac{dv}{dx}$

Paso 2. Se reconoce la formula a aplicar en la función en este caso en una variable a una potencia.

$$y = \sqrt{a+bt}$$
$$\frac{dy}{dx} = n.v^{n-1}dv$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(a+bt)^{-\frac{1}{2}}(b)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2\sqrt{a+bt}}$$

Ejemplo 18.

Resolver el siguiente ejercicio**:** $y = 3x^4 - 2x^3 + 6x$

Paso 1. Se reconoce la formula a aplicar en la función dada. Para este caso se van aplicar 3, la de la suma, multiplicación y de la variable elevada a un exponente.

Formula: $\frac{dy}{dx}(v^n) = n.v^{n-1}\frac{dv}{dx}$
$d(c) = 0$
$d(c.v) = c.dv$

Paso 2. Se reconoce la formula a aplicar en la función en este caso en una variable a una potencia.

$$y = 3x^4 - 2x^3 + 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 - 6x^2 + 6$$

Ejemplo 19.

Resolver el siguiente ejercicio**:** $y = \frac{432}{x}$

Paso1. Se escoge la formula a aplicar

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{c}{v}\right) = \frac{-c.dv}{v^2}$$

Paso2. Se escoge la formula a aplicar y se desarrolla el ejercicio, considerando el numerador y el denominador

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-432(1)}{x^2}$$

BIBLIOGRAFÍA

Baldor, A. (1989). *Algebra Elemental.* Medellin Colombia: NOVOAGRAFIC.

Bedoya, N. L. (1992). *Geometría Analitica y trigonometria.* Colombiia.

EARL W. SHOKOWSKI, J. A. (2009). *ALGEBRA Y TRIGONOMETRÍA CON GEOMETRIA ANALITICA.* DECIMO SEGUNDA EDICIÓN.

Espol. (2006). *Fundamentos de matematicas para Bachillerato.* Guayaquil: Poligrafica C.A.

Granville. (1967). *Trigonometria Plana Y Esferica.* Mexico: Unkion TopoGrafica Editorial HIspano Americana.

Granville, W. (2017). *Calculo Diferencial e Integral.* Mexico.

Lehmann, C. (2017). *Geometría Analítica.* Mexico.

Londoño, N., & Bedoya, H. (1992). *Geometría Analítica y Trigonometria.* Colombia: Normas S.A Apartado Aereo 53550,Bogota,Colombia .

Sparks, F., & Rees, P. (2012). *TRigonometría Plana.* Monterrey-Mexico: Reverté ediciones S.A de C.V.

Swokowki, E. W. (2009). *Álgebra y trigono<<<<<<<<metría con Geometría Analítica.* Decima Segunda edición.

Fundamentos básicos de matemáticas para el estudio del cálculo diferencial en la facultad de ciencias agropecuarias, se publicó en el mes de noviembre de 2026.

ISBN: 978-9907-802-32-0

Grupo Editorial BLR
Ecuador
Cel: +593 98 320 4362
https://grupoblr.com/
publicaciones@grupoblr.com

BIOGRAFÍA DEL AUTOR

Abrahan Rodolfo Cervantes Alava:
Es ingeniero agrónomo ecuatoriano, Doctor en Ciencias Agrarias, Magíster en Gerencia y Administración Empresarial Agropecuaria y docente universitario. Imparte asignaturas de matemática y desarrolla investigación en sanida vegetal, especialmente sobre Sigatoka en banano, contribuyendo al conocimiento y manejo de esta enfermedad.

FUNDAMENTOS BÁSICOS DE MATEMATICAS PARA EL ESTUDIO DEL CALCULO DIFERENCIAL EN LA FACULTAD DE CIENCIAS AGROPECUARIAS

Estimado lector, este libro es una guía didáctica diseñada para estudiantes de primer ciclo de Agronomía, Acuicultura, Medicina Veterinaria y Agropecuaria en la Facultad de Ciencias Agropecuarias de la UTMACH. Centrado en la asignatura de Cálculo Diferencial (unidad básica de 3 créditos y 144 horas), el texto busca desarrollar habilidades para resolver funciones algebraicas y trascendentes, interpretar geométricamente derivadas y sentar las bases para el Cálculo Integral. Basado en la trayectoria de más de 20 años del autor como profesor titular de la universidad, el libro incluye ejercicios resueltos, ejemplos e ilustraciones de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica que refuerzan los conocimientos del bachillerato y facilitan el aprendizaje continuo en los primeros niveles universitarios.

GRUPO BLR

Grupo Editorial BLR
Ecuador
Cel: +593 98 320 4362
https://grupoblr.com/
publicaciones@grupoblr.com

ISBN: 978-9907-802-32-0

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MACHALA
1969