GRUPO BLR

ANALIZANDO
LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS

ISBN: 978-9907-802-66-5

Johnny Paul Novillo Vicuña
Ángel Mauricio Ramón Noblecilla

2026

ANALIZANDO LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Johnny Paul Novillo Vicuña
Ángel Mauricio Ramón Noblecilla
AUTORES:



UTMACH

Este libro ha sido debidamente examinado y valorado en la modalidad doble par ciego con fin de garantizar la calidad científica.

©Grupo Editorial BLR
Universidad Técnica de Machala
Riobamba – Ecuador
Correo: publicaciones@grupoblr.com
https://grupoblr.com/libros-investigo
REPOSITORIO



Novillo, J., Ramón, A. (2026) Analizando los circuitos eléctricos. Grupo Editorial BLR.

© Johnny Paul Novillo Vicuña
Ángel Mauricio Ramón Noblecilla

Analizando los circuitos eléctricos.

ISBN: 978-9907-802-66-5

El copyright promueve la libertad de expresión, protege la diversidad de ideas y conocimiento, además apoya la libre expresión. Se prohíbe de manera rigurosa la producción o el almacenamiento de esta publicación, ya sea en su totalidad o en parte, está estrictamente prohibido por ley, incluyendo el diseño de la portada, así como su difusión a través de cualquiera de sus medios, ya sean electrónicos, mecánicos, ópticos, de grabación o incluso de fotocopia, sin permiso de los propietarios de los derechos de autor.

FILIACIÓN DEL AUTOR

Johnny Paul Novillo Vicuña

Universidad Técnica de Machala

Correo Electrónico: jnovillo@utmachala.edu.ec

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4915-3441

Ángel Mauricio Ramón Noblecilla

Universidad Técnica de Machala

Correo Electrónico: aramon@utmachala.edu.ec

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4310-8321

PREFACIO

El estudio de los sistemas eléctricos constituye la piedra angular de la tecnología moderna. Desde el diseño de hardware hasta la infraestructura que sostiene los sistemas de información, la comprensión de cómo fluye la energía a través de una red es una competencia indispensable para cualquier profesional del área técnica. Este volumen nace con la misión de transformar conceptos teóricos abstractos en herramientas prácticas y aplicables.

Este libro ha sido elaborado como material de apoyo para el estudio y análisis de circuitos eléctricos en corriente continua (CC). Su contenido inicia con las Leyes de Kirchhoff y avanza de manera progresiva hacia procedimientos que permiten resolver circuitos con un mayor número de elementos, nodos y mallas.

A lo largo de los capítulos se combinan los fundamentos eléctricos con los procedimientos matemáticos necesarios para obtener corrientes y voltajes. La intención es que el lector no se limite a aplicar fórmulas, sino que pueda comprender de dónde provienen las ecuaciones, cómo deben plantearse y qué significado tienen los resultados obtenidos.

El propósito de la obra es proporcionar una base que permita analizar diferentes configuraciones de circuitos eléctricos. Para ello se trabajan las Leyes de Kirchhoff, el método de corrientes de malla, el método de voltajes de nodo y los casos particulares en los que aparecen supernodos y supermallas. También se incorporan procedimientos algebraicos que facilitan la resolución de los sistemas de ecuaciones generados durante el análisis.

La selección del método dependerá de las características de cada circuito. En algunos casos será más conveniente trabajar con mallas, mientras que en otros el análisis por nodos permitirá reducir la cantidad de incógnitas. Reconocer estas diferencias forma parte del proceso de aprendizaje que se desarrolla en el texto.

Organización del contenido

El libro se encuentra distribuido en cuatro capítulos:

Capítulo 1. Leyes de Kirchhoff

Se estudian la Ley de Corrientes de Kirchhoff y la Ley de Voltajes de Kirchhoff. Se explica su aplicación en diferentes circuitos y se establecen las bases que posteriormente serán utilizadas en los métodos de nodos y mallas.

Capítulo 2. Método de corrientes de malla

Se desarrolla el procedimiento para asignar corrientes a las mallas de un circuito y plantear las ecuaciones correspondientes mediante la Ley de Voltajes de Kirchhoff. Para resolver los sistemas obtenidos se utilizan procedimientos como sustitución, regla de Cramer, Gauss-Jordán y eliminación gaussiana.

Capítulo 3. Método de voltajes de nodo

Se aborda el análisis de circuitos a partir de los voltajes existentes en sus nodos. El procedimiento incluye la selección de un nodo de referencia, el planteamiento de las ecuaciones mediante la Ley de Corrientes de Kirchhoff y la resolución de las incógnitas obtenidas.

Capítulo 4. Supernodos y supermallas

Se estudian aquellas configuraciones en las que la presencia de fuentes de voltaje o de corriente requiere modificar el procedimiento convencional. Se explica cómo identificar un supernodo o una supermalla y cómo establecer las ecuaciones necesarias para resolver cada caso.

Evaluación del aprendizaje

Al finalizar los contenidos se incluyen actividades y ejercicios que permiten comprobar la comprensión de los procedimientos estudiados. Estos problemas están planteados para que el lector practique la identificación de datos, el establecimiento de ecuaciones y la selección del método de resolución más apropiado para cada circuito.

Enfoque didáctico

El contenido ha sido organizado procurando que cada procedimiento pueda seguirse de manera ordenada. Antes de resolver los ejercicios se presentan los conceptos y relaciones matemáticas que serán utilizados, para posteriormente aplicarlos en circuitos concretos.

Entre los principales elementos considerados en el desarrollo del libro se encuentran:

Aplicación matemática: se utilizan procedimientos de álgebra lineal, como la regla de Cramer, Gauss-Jordán y la eliminación gaussiana, para resolver los sistemas de ecuaciones obtenidos durante el análisis de circuitos.

Ejercicios desarrollados: los procedimientos se presentan mediante ejercicios resueltos paso a paso, permitiendo observar cómo se pasa del circuito original al planteamiento matemático y finalmente al resultado.

Secuencia de trabajo: los temas avanzan desde los principios básicos hasta configuraciones que requieren supernodos y supermallas, de manera que los conocimientos adquiridos en los primeros capítulos puedan aplicarse posteriormente.

Desarrollo del análisis: se busca que el lector aprenda a identificar las características del circuito, seleccionar el procedimiento adecuado, organizar las ecuaciones e interpretar los valores obtenidos.

Al avanzar en la lectura, usted identificará símbolos que le asistirán en la comprensión del tema, la valoración de su aprendizaje y el refuerzo de lo estudiado mediante la exploración de fuentes alternativas. Los símbolos utilizados son:

Sabías que…



Dentro de su desarrollo, los autores comparten un dato curioso que resulta relevante para el contenido tratado.

Preguntas de reflexión



Preguntas para desarrollar el pensamiento crítico y que le permitirán consolidar su comprensión del tema.

Refuerza tu conocimiento



Referencias a recursos tanto bibliográficos como digitales, para complementar el conocimiento del tema.

Esperamos que esta entrega impulse su camino hacia el dominio de la electricidad. Aprovechen cada concepto y resuelvan las actividades propuestas para fortalecer sus habilidades técnicas. Este volumen está diseñado para dotarlos de una base matemática robusta, preparándolos para los desafíos futuros en el estudio profundo de los circuitos eléctricos.

ÍNDICE

PREFACIO ..... **i**

ÍNDICE ..... **vi**

ÍNDICE DE FIGURAS ..... **x**

ÍNDICE DE ECUACIONES ..... **xiii**

ÍNDICE DE TABLAS ..... **xiv**

CAPÍTULO I **15**

1 INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DE CIRCUITOS EN CORRIENTE CONTINUA **15**

1.1 Objetivos 15

1.2 Introducción 15

1.3 Leyes de Kirchhoff 16

1.1.1 Primera Ley de Kirchhoff (Ley de corrientes) 16

1.3.1 Segunda Ley de Kirchhoff (Ley de voltajes) 23

CAPÍTULO II **33**

2 MÉTODO DE CORRIENTES DE MALLA **33**

2.1 Objetivos 33

2.2 Introducción 33

2.3 Conceptos básicos 35

2.2.1 Definición 35

2.2.2 Metodología 36

2.2.3 Cálculo de intensidades 42

2.4 Resolución de ejercicios 46

2.4.1 Resolución del circuito aplicando el método de sustitución 48

2.4.2 Resolución del circuito aplicando la regla de Cramer 53

2.4.3 Resolución del circuito aplicando el método de Gauss-Jordán .. 59

2.4.4 Resolución del circuito aplicando el método de eliminación Gaussiana 62

CAPÍTULO III 72

3 MÉTODO DE VOLTAJES DE NODO 72

3.1 Objetivos 72

3.2 Introducción 72

3.3 Conceptos básicos 74

3.3.1 Definición 74

3.3.2 Metodología 74

3.4 Resolución de ejercicios 88

3.4.1 Resolución del circuito aplicando la regla de Cramer 98

3.4.2 Resolución del circuito aplicando el método de Gauss-Jordán 104

CAPÍTULO IV..... 112

4 SUPER NODOS Y SUPER MALLAS 112

4.1 Objetivos 112

4.2 Introducción 112

4.3 Conceptos Básicos 113

4.3.1 Definición..... 114

4.3.2 Metodología 114

4.3.3 Ecuación de corriente del super nodo 115

4.3.4 Ecuación de voltaje impuesta por la fuente..... 116

4.4 Resolución de ejercicios..... 117

4.4.1 Resolución de circuito de Super Nodos 117

4.5 Conceptos Básicos 119

4.5.1 Definición..... 119

4.5.2 Metodología 120

4.5.3 Estructura del Análisis con Super Malla..... 121

4.6 Resolución de ejercicios..... 122

EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE 128

SOLUCIONARIO 134

BIBLIOGRAFÍA 136

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Circuito para aplicar la ley de corrientes. 17

Figura 2. Circuito con las intensidades I2 e I3. 18

Figura 3. Comprobación en Crocodile de la ley de corrientes de Kirchhoff. 19

Figura 4. Signos de las fuentes de voltaje. 24

Figura 5. Orientación. 24

Figura 6. Ejercicio 1 para aplicar ley de voltaje. 26

Figura 7. Comprobación de los resultados del ejercicio 1 aplicando ley de voltaje. 27

Figura 8. Ejercicio 2 para aplicar ley de voltaje. 28

Figura 9. Comprobación de los resultados del ejercicio 2 aplicando ley de voltaje. 30

Figura 10. Corrientes de mallas. 36

Figura 11. Asignación de sentido de giro. 37

Figura 12. Comprobación de resultados utilizando Crocodile. 44

Figura 13. Circuito con tres mallas para aplicar corrientes de mallas. 47

Figura 14. Circuito con tres mallas para aplicar corrientes de mallas – Solución. 47

Figura 15. Comprobación en Crocodile. 70

Figura 16. Voltaje de nodos. 74

Figura 17. Nodos de un circuito. 75

Figura 18. Asignar el nodo de referencia. 75

Figura 19. Asignar nombres a los voltajes. 76

Figura 20. Nodo Va. 77

Figura 21. Corrientes que pasan por el Nodo Vb. 78

Figura 22. Componentes de la Corriente I1. 79

Figura 23. Componentes de la corriente I2. 79

Figura 24. Componentes de la corriente I3. 79

Figura 25. Corrientes que pasan por el Nodo Vc. 81

Figura 26. Componentes de la corriente I2 en la resistencia R4. . 82

Figura 27. Componentes de la corriente I2 en la resistencia R5. . 82

Figura 28. Comprobación en Crocodile. 87

Figura 29. Circuito de tres mallas para aplicar voltaje de nodos. 89

Figura 30. Asignar nodos y nodo de referencia en voltaje de nodos. 89

Figura 31. Corrientes del Nodo Vb en voltaje de nodo. 91

Figura 32. Componentes de la corriente I1 en voltaje de nodo. ... 91

Figura 33. Componentes de la corriente I2 en voltaje de nodo. ... 91

Figura 34. Componentes de la corriente I4 en voltaje de nodo. ... 92

Figura 35. Corrientes del Nodo Vc. 93

Figura 36. Componentes de la corriente I2 en nodo Vc. 94

Figura 37.Componentes de la corriente I3 en nodo Vc. 94

Figura 38. Componentes de la corriente I5 en nodo Vc. 94

Figura 39. Corrientes del Nodo Vd en voltaje de nodo. 96

Figura 40. Componentes de la corriente I3 en la resistencia R5. . 96

Figura 41. Componentes de la corriente I3 en la resistencia R6 y R7. 97

Figura 42. Comprobación en el simulador Crocodile. 109

Figura 43. Circuito de Super Nodo. 118

Figura 44. Circuito de super mallas. 123

ÍNDICE DE ECUACIONES

Ecuación 1. Primera Ley de Kirchhoff. 17

Ecuación 2. Segunda Ley de Kirchhoff. 23

Ecuación 3. Segunda Ley de Kirchhoff desde un enfoque de fuentes de voltaje y caídas de tensión. 23

Ecuación 4. Sumatoria de corrientes. 78

Ecuación 5. Fórmula del voltaje. 85

Ecuación 6. LCK. 116

Ecuación 7. Reorganizado para nodos. 116

Ecuación 8. Ley de Ohm. 116

Ecuación 9. Diferencia potencial. 116

Ecuación 10. Dependiendo la polaridad. 116

Ecuación 11. Ecuación LVK. 121

Ecuación 12. Ecuación para voltajes super malla. 121

Ecuación 13. Ecuación que fluye de malla 1 a la 2. 122

Ecuación 15. Ecuación dependiendo la dirección. 122

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Asignación de signos para fuente de voltaje...... 37

Tabla 2. Comparación de los valores analíticos con los del simulador...... 45

Tabla 3. Comparación de los valores obtenidos con Crocodile del circuito de tres mallas...... 70

Tabla 4. Asignación del signo de las ecuaciones. 77

Tabla 5. Comparación de los valores analíticos con los del simulador...... 87

Tabla 6. Comparación de los valores obtenidos con Crocodile con el método voltaje de nodo. 110

CAPÍTULO I

1 INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DE CIRCUITOS EN CORRIENTE CONTINUA

1.1 Objetivos

- Comprender conceptos básicos sobre los circuitos eléctricos en corriente continua.
- Reconocer e implementar la aplicación apropiada de cada ley de Kirchhoff en un circuito eléctrico.
- Determinar variables eléctricas desconocidas en un circuito eléctrico a partir de la aplicación de las leyes de Kirchhoff.
- Conocer la aplicación de las leyes de Kirchhoff en la vida cotidiana

1.2 Introducción

Los circuitos de corriente continua se caracterizan por el hecho que su dirección de voltaje o corriente no cambia de sentido según el tiempo y espacio determinado, para ello, es necesario de un análisis a detalle de los circuitos eléctricos, aplicando diferentes técnicas, métodos y leyes, con el fin de comprobar los valores obtenidos en su resolución empírica y por medio de un software eficaz.

Las leyes de Kirchhoff se basan en el principio de la conservación de carga y energía, y junto con la ley de Ohm y las ecuaciones de los componentes que conforman el circuito, podremos empezar a analizar circuitos de forma eficiente.

El método de corriente de malla se basa en la ley de voltaje de Kirchhoff, donde se establece que la suma algebraica de todos los voltajes en torno a de una malla siempre será igual a cero. Además, debemos conocer que solo se aplica a circuitos planos, es decir, en aquellos circuitos que se pueden dibujar en un plano y sin cruces.

El método de voltaje de nodos está basado en la ley de corrientes de Kirchhoff, siendo este un método muy práctico para la resolución de los circuitos, en el cual se debe identificar los nodos en un circuito y asignar un nodo de referencia. Se debe tener en cuenta que la suma de las corrientes o intensidades será igual que cero, debido a que la carga nunca puede acumularse en un nodo.

1.3 Leyes de Kirchhoff

1.1.1 Primera Ley de Kirchhoff (Ley de corrientes)

La Ley de las corrientes o Ley de los nodos, también conocida como la primera ley de Kirchhoff, constituye un principio fundamental en el estudio de los circuitos eléctricos. Su fundamento está relacionado con la conservación de la carga eléctrica. Al observar un nodo del circuito, las corrientes que llegan a este punto deben guardar correspondencia con las que continúan por las demás ramas conectadas. Por esta razón, al realizar el análisis se consideran tanto las corrientes de entrada como las de salida.

Para plantear matemáticamente esta condición, se identifican las corrientes asociadas al nodo y se establece una igualdad entre las que ingresan y las que salen. Dicho de otra forma, en un nodo no puede

acumularse corriente, ya que todo lo que entra debe salir para mantener el equilibrio eléctrico. De tal forma la podemos expresar matemáticamente de la siguiente forma:

$$\sum_{}^{i} entrada = \sum_{}^{i} salida$$

Ecuación 1. Primera Ley de Kirchhoff.

Ejemplo de aplicación:

Para este ejemplo utilizaremos un circuito sencillo, como el indicado en la Figura 1.

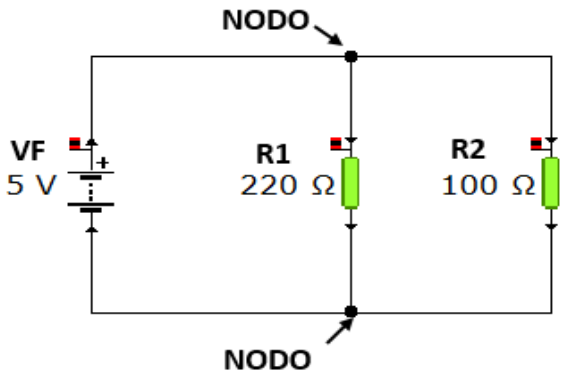


Figura 1. Circuito para aplicar la ley de corrientes.

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 1 podemos observar dos resistencias ($R1$ y $R2$) conectadas en paralelo junto a una fuente de alimentación (VF), en este caso a una batería de 5 voltios. Como tenemos resistencias en paralelo, la tensión es la misma para ambas, por ende, su tensión es fija.

Si utilizamos la ley de Ohm para hallar la corriente de cada resistencia podemos decir que:

$$\boldsymbol{I1 = I2 + I3 \ \rightarrow \ I4 = \ I3 + I2}$$

$$\boldsymbol{I3} = \ E/R1 = \ 5/220 = \ 0.0227 \ A = \ 22.7mA$$

$$\boldsymbol{I2} = \ E/R2 = \ 5/100 = \ 0.05 \ A = \ 50mA$$

Entonces de estos valores podemos obtener el siguiente gráfico:

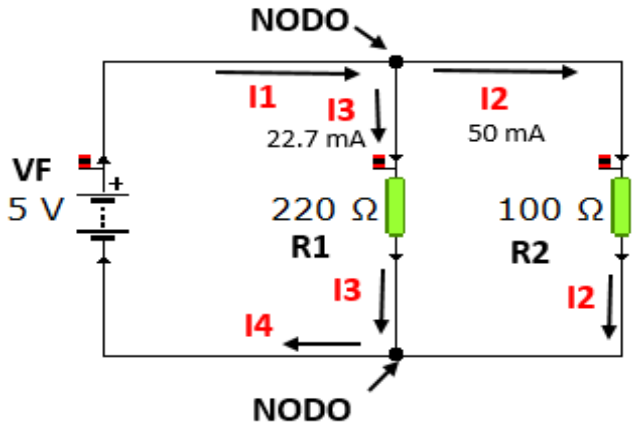


Figura 2. Circuito con las intensidades I2 e I3.

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 2 apreciamos que $I1$ se divide en $I3$ y en $I2$, y la salida de estas nos da $I4$, por lo tanto, podemos poner en práctica la primera ley de Kirchhoff.

$$\boldsymbol{I1} = \ I3 + I2 = \ 50mA \ + \ 22.7mA = \ 72.7mA$$

$$\boldsymbol{I4} = \ I3 + I2 = \ 50mA \ + \ 22.7mA = \ 72.7mA$$

Con esto comprobamos la primera Ley de Kirchhoff, este declara que la sumatoria de todas las corrientes que entran dentro de un nodo, es la misma sumatoria de todas las corrientes que salen de este mismo nodo.

Para comprobar estos resultados se simuló el mismo circuito:

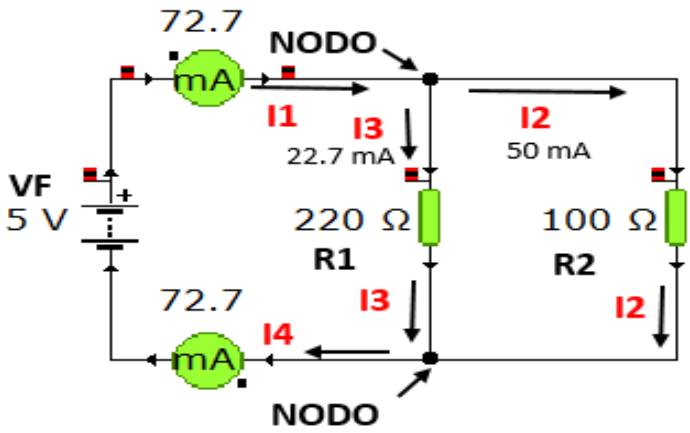


Figura 3. Comprobación en Crocodile de la ley de corrientes de Kirchhoff.

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 3 podemos observar que los resultados del cálculo y de la simulación son muy parecidos, por ende, podemos declarar que el procedimiento fue el correcto.

Ejemplo de la vida cotidiana:

La Regleta de Enchufes y la Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK):

La Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK) es uno de los principios más fundamentales y se basa en la conservación de la carga eléctrica. En términos sencillos, establece que la carga no se puede crear ni destruir en un punto de conexión de un circuito. El concepto central de la LCK

es el nodo, que se define como cualquier punto del circuito donde se unen dos o más elementos, de lo cual establece en la ecuación 1.

Una regleta es un dispositivo pasivo que se conecta a un único tomacorriente de pared y proporciona múltiples salidas. Internamente, todos los enchufes de la regleta están conectados en paralelo al mismo punto de entrada, lo que crea un nodo perfecto para el análisis LCK. Podemos identificar los siguientes elementos en este ejemplo:

- **Cable de Entrada:** Un único cable que se conecta a la pared.
- **Punto de Distribución Interna:** Dentro de la carcasa plástica, el cable de entrada se conecta a una barra conductora (una lámina metálica).
- **El Gran Nodo Central:** Esta barra conductora se convierte en el nodo principal de distribución (el borne positivo) al que se conectan las derivaciones para cada uno de los enchufes de la regleta.

Partiendo de esta información podemos establecer el ejemplo de una regleta de 4 tomas, teniendo los siguientes dispositivos: laptop, monitor, cargador y lampara.

- Corriente de entrada: La corriente total que llega desde la pared hasta el nodo central de la regleta. Esta es la corriente entrante al sistema de distribución.

$$I_{Pared}$$

- Corriente de salida: Cada dispositivo que enchufamos y encendemos consume una cantidad específica de corriente. Estas

corrientes salen del nodo central, tomando un camino diferente por cada enchufe.

$$I_{Laptop}, I_{Monitor}, I_{Cargador,} I_{Lampara}$$

- La ecuación de equilibrio: La LCK nos dice que la suma de todas las corrientes consumidas debe ser igual a la corriente total suministrada.

$$I_{Pared} = I_{Laptop} + I_{Monitor} + I_{Cargador} + I_{Lampara}$$

- Tomando como referencia este consumo: 1.5 A la laptop, 1 A el monitor, 0.5 A el cargador y 0.7 A la lampara.

$$I_{Pared} = 1.5A + 1A + 0.5A + 0.7A = 3.7A$$

De este modo podemos verificar la tensión existente en la regleta y poder obtener datos para determinar si la misma es idónea para la carga, la instalación eléctrica que se encuentra conectada es adecuada, entre otros datos más.

Sabías que…



Gustav Robert Kirchhoff [Königsberg (Prusia Oriental), 1824 – Berlín, 1887].

Físico Alemán. Formuló las Leyes que llevan su nombre, aplicables al cálculo de tensiones, intensidades y resistencias. Inventó el espectroscopio moderno. Aplicó los métodos de análisis espectográfico para determinar la composición espectral del sol, además descubrió dos nuevos elementos que son el cesio y el rubidio.

Preguntas de reflexión



Cuando se realizan cálculos, ¿es indispensable utilizar todos los valores decimales?

¿Por qué las resistencias en paralelo tienen la misma tensión?

1.3.1 Segunda Ley de Kirchhoff (Ley de voltajes)

La segunda ley de Kirchhoff, también conocido como ley de voltaje o ley de malla y tensión, estipula que "La suma de todos los voltajes alrededor de una malla es igual a cero", esto también obedece a la ley de conservación de la carga.

Podemos escribir esta ley de la siguiente forma:

$$\sum V = 0$$

Ecuación 2. Segunda Ley de Kirchhoff.

Visto desde un enfoque de fuentes de voltaje y caídas de tensión la ley de voltajes de Kirchhoff se puede plantear de la siguiente manera:

$$\sum v_f = \sum I * R|$$

Ecuación 3. Segunda Ley de Kirchhoff desde un enfoque de fuentes de voltaje y caídas de tensión.

Donde ***¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.***, nos indica que la sumatoria de todas las fuentes de voltaje en una malla es igual a la sumatoria de todas las caídas de tensión producidas en las resistencias pertenecientes a esa malla.

Signos de las fuentes de voltaje para el planteamiento de la Ley de Voltaje de Kirchhoff.

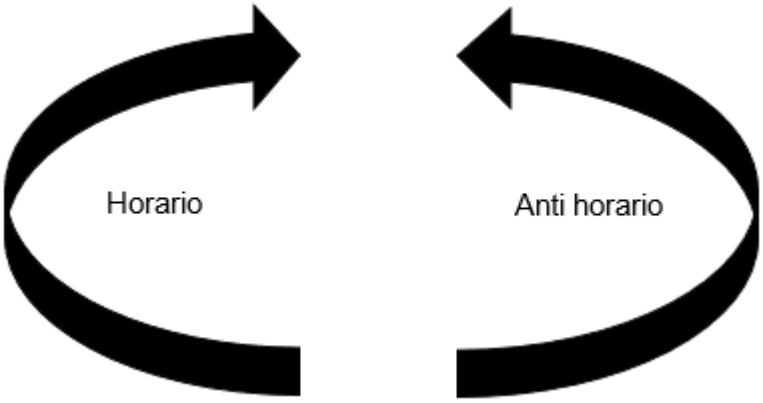


Figura 4. Signos de las fuentes de voltaje.

Fuente: Elaboración propia.

Al trabajar con los signos de las fuentes de voltaje de un circuito, nos basamos del sentido de como circula su voltaje.

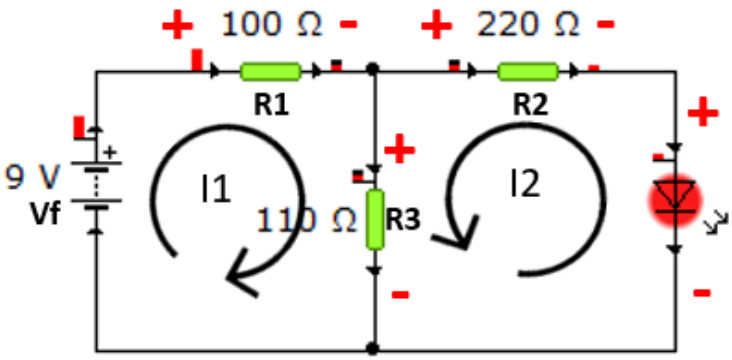


Figura 5. Orientación.

Fuente: Elaboración propia.

Los polos de cada componente son determinados por la fuente de alimentación; si la corriente entra por un componente, este lado tiene un polo positivo, y por donde sale la corriente es el polo negativo.

En la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** observamos q ue se está trabajando con la orientación horaria, con este sentido nos basamos para proyectar las distintas ecuaciones respetando los signos de cada componente.

Por ejemplo, observamos nuevamente la **¡Error! No se encuentra el o rigen de la referencia.**, respetando la orientación dada más los signos de cada componente, podemos decir que:

$$\boldsymbol{I1} = Vf - R1 - R3(I1 - I2)$$

$$\boldsymbol{I1} = 9v - 100\boldsymbol{I1} - 110\boldsymbol{I1} + 110\boldsymbol{I2}$$

$$\boldsymbol{I1} = 9v - 210\boldsymbol{I1} + 110\boldsymbol{I2}$$

En cambio, con la $I2$ será distinto ya que su sentido es anti horario entonces se tomarán los signos contrarios:

$$I\boldsymbol{2} = R2 - R3\,(I2 - I1)$$

$$\boldsymbol{I2} = 220\boldsymbol{I2} - 110\boldsymbol{I2} + 110\boldsymbol{I1}$$

$$I\boldsymbol{2} = 110\boldsymbol{I1} - 110\boldsymbol{I2}$$

Ejercicio 1:

Aplicando las leyes de Kirchhoff determine la corriente que circula a través del circuito de la ***¡Error! No se encuentra el origen de la r eferencia.***.

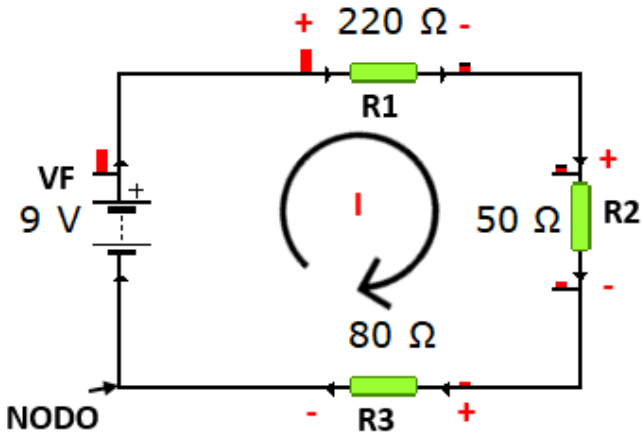


Figura 6. Ejercicio 1 para aplicar ley de voltaje.

Fuente: Elaboración propia.

El circuito de la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** e s uno de los más básicos, ideal para comenzar a implementar estos conceptos. Ya que tenemos puesto el sentido de la corriente, ya sea en sentido horario o en sentido anti horario, en este caso tenemos en sentido horario.

Cuando la corriente entre por un elemento pasivo, se considera polo positivo y la salida con polo negativo.

Analizamos desde el nodo los elementos que componen la malla, consideramos el signo de cada uno y la magnitud. Teniendo en cuenta esto tenemos:

$\boldsymbol{V = R/I}$ (Ley de ohm para encontrar el voltaje de las resistencias)

$$+9 - 220\boldsymbol{I1} - 50\boldsymbol{I1} - 80\boldsymbol{I1} = 0$$

$$9 - 350\boldsymbol{I1} = 0$$

$$9 = 350\boldsymbol{I1} \rightarrow \boldsymbol{I1} = 9/350 \rightarrow \boldsymbol{I1} = 0.02571\ A$$

Los valores observados en la simulación del circuito propuesto son los siguientes. (ver **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**).

Figura 7. Comprobación de los resultados del ejercicio 1 aplicando ley de voltaje.

Fuente: Elaboración propia.

Ejercicio 2:

Aplicando las leyes de Kirchhoff, determine los voltajes que aparecen a través de cada una de las resistencias en el circuito de la ***¡Error! No se e ncuentra el origen de la referencia.***.

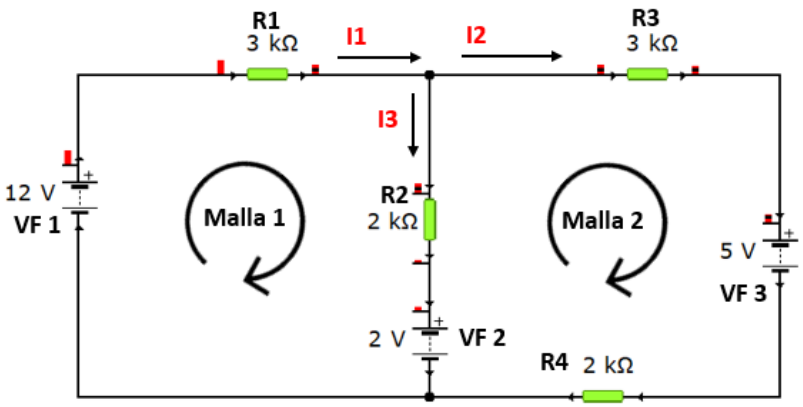


Figura 8. Ejercicio 2 para aplicar ley de voltaje.

Fuente: Elaboración propia.

NOTA: Tengamos en cuenta los signos de los componentes.

Comenzamos con los componentes de la malla 1:

Malla 1 $= \sum v = \sum IR$

Malla 1 $= -12v + 3KI1 + 2K\,(I1 - I2) + 2v = 0$

Malla 1 $= -10v + 3KI1 + 2KI1 - 2KI2 = 0$

Malla 1 $= -10v + 5KI1 - 2KI2 = 0$

Malla 1 $= \mathbf{5KI1 - 2KI2 = 10v}$

Obtenemos una ecuación en la malla 1, proseguimos a la malla 2.

Malla 2 $= \sum v = \sum IR$

Malla 2 $= -2v - 2K(I1 - I2) + 3KI2 + 5v + 2KI2 = 0$

Malla 2 $= 3v - 2KI1 + 2KI2 + 3KI2 + 2KI2 = 0$

Malla 2 $= 3v - 2KI1 + 7KI2 = 0$

Malla 2 $= \boldsymbol{-2KI1 + 7KI2 = -3v}$

Entonces tenemos 2 ecuaciones de las que se procederá a realizar el método por reducción para encontrar las incógnitas.

Malla 1 $= \boldsymbol{5KI1 - 2KI2 = 10v}$

Malla 2 $= \boldsymbol{-2KI1 + 7KI2 = -3v}$

Multiplicaré la Malla 1 por 2, y la Malla 2 por 5 para eliminar esos datos.

(2) $\boldsymbol{5KI1 - 2KI2 = 10v \rightarrow 10KI1 - 4KI2 = 20v}$

(5) $\boldsymbol{-2KI1 + 7KI2 = -3v \rightarrow -10KI1 + 35KI2 = -15v}$

$$10KI1 - 4KI2 = 20v$$
$$-10KI1 + 35KI2 = -15v$$
$$0 + 31KI2 = 5v$$

$$I2 = \frac{5v}{31KI2} \rightarrow \boldsymbol{I2 = 161.29\ uA}$$

Reemplazamos este valor en una de las ecuaciones para encontrar I2.

$$5KI1 - 2K(161.29 * 10^6) = 10v \rightarrow 5KI1 - 0.322258 = 10v$$
$$\rightarrow 5KI1 = 0.322258 + 10 \rightarrow 5KI1 = 10.322258$$
$$\rightarrow I1 = \frac{10.322258}{5000} \rightarrow \boldsymbol{I1 = 0.0020064516\ A = 2.06\ mA}$$

Utilizando la primera Ley de Kirchhoff decimos que:

$$\boldsymbol{I3 = I1 - I2}$$

$$\boldsymbol{I3 =} \ 2.06\ mA \ - \ 161.29 mA$$

$$\boldsymbol{I3 =} \ 1.90\ mA$$

Mediante un simulador se procedió a verificar los resultados calculados (ver ***¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.***).

Figura 9. Comprobación de los resultados del ejercicio 2 aplicando ley de voltaje.

Fuente: Elaboración propia.

Ejemplo de la vida cotidiana:

La Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) en una Linterna (Circuito Serie):

La Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) es el pilar del Análisis de Mallas y, al igual que la LCK, es un principio de conservación, pero aplicado a la energía: la energía total suministrada debe ser igual a la energía total consumida.

Una linterna simple es el ejemplo perfecto de un circuito en serie. Consiste típicamente en:

- Fuente de Voltaje: Dos o tres pilas (baterías). Tenemos voltajes de 1.5, en este caso si se usa tres pilas daría un total de 4.5V.
- Elemento Consumidor: Un foco o bombilla (resistencia).
- Conductor: El cableado interno y el interruptor.

Al encender la linterna, la corriente recorre una malla cerrada. La LVK exige que el voltaje total de las fuentes se consuma exactamente en el foco. i la fuente suministra 4.5V el foco debe consumir 4.5V para que la suma total sea cero:

$$4.5V - V_{foco} = 0 \rightarrow V_{foco} = 4.5V$$

Este ejemplo resalta el concepto de conservación de energía:

- Cuando las pilas están nuevas, ofrecen su voltaje nominal de 4.5V, permitiendo al foco brillar con su máxima intensidad.
- A medida que las pilas se agotan, su capacidad química disminuye, y el voltaje que pueden suministrar V_{fuente}empieza a caer (p. ej., de 4.5V a 3V).

- Dado que la LVK siempre debe cumplirse, si la energía suministrada baja, la energía consumida también debe hacerlo:

$$3V - V_{foco} = 0 \rightarrow V_{foco} = 3V$$

Sabías que…



Inicio de una nueva era en el ámbito de la astronomía.

Mientras intentaba determinar la composición del sol, Kirchhoff descubrió que cuando la luz pasa a través de un gas, absorbe la longitud de onda que se emitiría si se precalienta. Utilizó con éxito este principio para explicar las muchas líneas oscuras que aparecían en el espectro solar, conocidas como líneas de Fraunhofer.

Preguntas de reflexión



¿En qué se asemejan ambas leyes de Kirchhoff?

¿La ley de Ohm es necesaria para aplicar estas leyes?

¿Estas leyes son aptas para todos los circuitos eléctricos?

CAPÍTULO II

2 MÉTODO DE CORRIENTES DE MALLA

2.1 Objetivos

- Aplicar la Ley de Voltajes de Kirchhoff para formular ecuaciones de malla en circuitos eléctricos planos de corriente continua.
- Determinar las corrientes correspondientes a cada malla, estableciendo el sentido de recorrido y los signos que se utilizarán durante el análisis.
- Resolver las ecuaciones que resultan del análisis de cada circuito, empleando sustitución, regla de Cramer, Gauss-Jordán o eliminación gaussiana según el caso.

2.2 Introducción

Al trabajar con corrientes de malla, el circuito se estudia a partir de sus recorridos cerrados, asignando una corriente de análisis a cada uno de ellos. Su aplicación se apoya en la Segunda Ley de Kirchhoff, también conocida como Ley de Voltajes de Kirchhoff, según la cual la suma algebraica de las caídas y elevaciones de tensión presentes en un recorrido cerrado debe ser igual a cero.

Este principio permite interpretar lo que ocurre con la energía dentro del circuito. La energía proporcionada por las fuentes se distribuye entre los diferentes elementos que lo conforman, como las resistencias, de modo que al completar una trayectoria cerrada se mantiene el equilibrio energético.

Para aplicar el método se identifican primero las mallas independientes del circuito. Su utilización resulta particularmente conveniente en circuitos planos, es decir, aquellos cuya representación puede realizarse sin que las ramas tengan que cruzarse unas con otras. A cada malla se le asigna una corriente de referencia, generalmente siguiendo un mismo sentido para facilitar el planteamiento.

Estas corrientes se emplean como variables de análisis y no necesariamente corresponden de forma directa con la corriente que circula por cada componente. Cuando dos mallas comparten una resistencia, por ejemplo, la corriente que atraviesa dicho elemento se determina a partir de la relación entre las corrientes asignadas a ambas mallas.

El sentido de cada corriente puede escogerse de manera arbitraria. Una práctica común consiste en definir todas las corrientes en sentido horario. Esta elección no altera el resultado del análisis, siempre que los signos se mantengan de manera coherente durante el desarrollo de las ecuaciones. Si al finalizar los cálculos se obtiene un valor negativo, se interpreta simplemente que la corriente real circula en sentido contrario al supuesto inicialmente.

Una vez identificadas las mallas y establecidas sus respectivas ecuaciones mediante la Ley de Voltajes de Kirchhoff, se obtiene un sistema de ecuaciones lineales. Su resolución puede realizarse mediante diferentes procedimientos matemáticos, entre ellos sustitución, regla de Cramer, eliminación gaussiana o Gauss-Jordán. La elección dependerá

del número de incógnitas y de la complejidad del circuito que se esté estudiando.

En el ámbito educativo, este procedimiento permite organizar de forma clara el análisis de circuitos que contienen varias ramas y fuentes. También puede complementarse con programas de simulación, como Crocodile, con el propósito de comparar los resultados calculados manualmente con los valores obtenidos en el circuito simulado. Esta comparación facilita la comprobación de los cálculos y ayuda a reconocer posibles errores en la asignación de signos, corrientes o caídas de tensión.

2.3 Conceptos básicos

2.2.1 Definición

El método de corrientes de malla consiste en asignar una corriente de referencia a cada malla independiente de un circuito eléctrico y, posteriormente, plantear las ecuaciones correspondientes mediante la Ley de Voltajes de Kirchhoff. Las corrientes desconocidas se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones lineales generado.

Su principal ventaja es que permite organizar el análisis de circuitos planos de una manera estructurada, reduciendo en muchos casos el número de ecuaciones necesarias para determinar las corrientes y voltajes presentes en el circuito.

Sin embargo, esto depende del tipo de circuito y la forma en que se seleccionen las mallas, porque podemos evidenciar diferentes posibilidades de conexión de las fuentes como:

- Fuentes de corriente controladas
- Fuentes de voltaje independientes
- Fuentes de voltaje controladas
- Fuentes de corriente independientes no compartidas por varias mallas.
- Fuentes de corriente independientes compartidas por varias mallas.

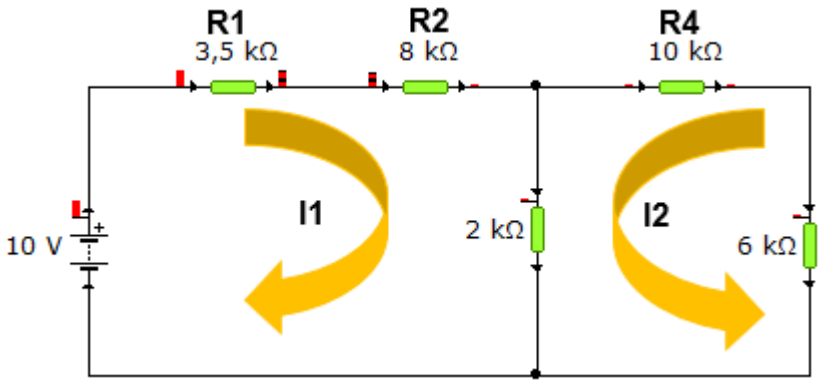


Figura 10. Corrientes de mallas.

Fuente: Elaboración propia.

2.2.2 Metodología

El método de corriente de mallas consiste en cuatro pasos:

Paso 1: Asignar un sentido de giro a las corrientes de malla, puede ser horario (manecillas del reloj) o antihorario; sin embargo, esto es arbitrario, porque la dirección no siempre coincide con la corriente real, pero nos sirve para identificar el sentido de corrientes que circulan a

través de todos los elementos del circuito, tal como nos indica la Digura 11.

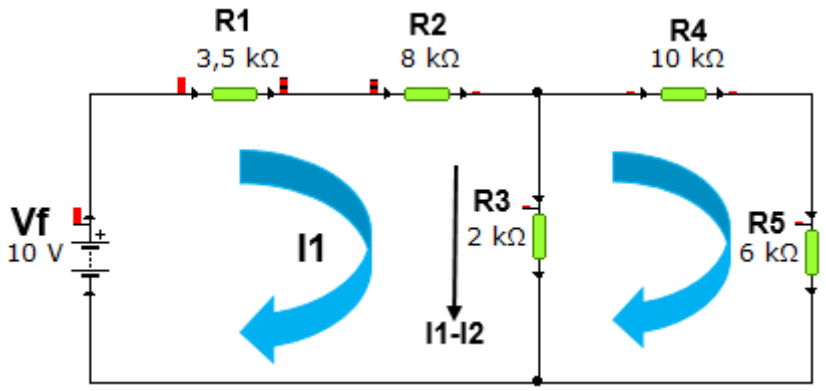
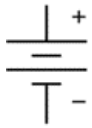
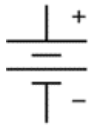


Figura 11. Asignación de sentido de giro.

Fuente: Elaboración propia.

Paso 2: Definir el signo para las fuentes de voltaje en cada una de las trayectorias cerradas, tomando en cuenta las direcciones de las corrientes asignadas, tal como se indica en la **¡Error! No se encuentra e l origen de la referencia.**.

Tabla 1. Asignación de signos para fuente de voltaje.

Polaridad de la fuente de voltaje	Sentido de la corriente de malla	Signo asignado
		+Vf
		-Vf

Paso 3: Aplicar la segunda ley de voltaje de Kirchhoff en torno a cada malla, considerando que la suma algebraica de todas las fuentes de voltaje dentro de la malla, será igual a la suma algebraica de todas las caídas de tensión dentro de la misma. A continuación, se indican las ecuaciones correspondientes a la malla 1 del circuito de la Figura 11.

M1: $\sum$ Vf = $\sum$ IR

M1: $+Vf1 = I1.R1 + I1.R2 + R3(I1 - I2)$

$+Vf1 = I1.R1 + I1.R2 + I1.R3 - I2.R3$

$+Vf1 = I1(R1 + R2 + R3) - I2.R3$

Como se puede observar en la ecuación inicial de la malla, se ha indicado la caída de tensión a través de la resistencia $R3$, como el producto de $R3$ por la resta de $I1 - I2$. Esto se ha realizado debido a que ambas corrientes tienen sentido opuesto a través de $R3$.

A continuación, se indican las ecuaciones correspondientes a la malla 2 del circuito de la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**.

M: $\sum$ Vf = $\sum$ IR

M2: $0 = I2.R4 + I2.R5 + R3(I2 - I1)$

$0 = I2.R4 + I2.R5 + I2.R3 - I1.R3$

$0 = -I1.R3 + I2(R3 + R4 + R5)$

En la ecuación anterior, la sumatoria de fuentes de voltaje es igual a cero debido a que no existe ninguna fuente de voltaje en la malla.

Paso 4: Resolver las ecuaciones resultantes para las corrientes de malla utilizando cualquier método para la resolución de un sistema de ecuaciones lineales, como, por ejemplo: sustitución, reducción, igualación, sistema matricial, matriz inversa, determinantes, método de Cramer, entre otros. A continuación, se indica el sistema de ecuaciones lineales correspondiente al circuito de la **¡Error! No se encuentra el o rigen de la referencia.** y su resolución a través del método de sustitución, el mismo que se explicará más detenidamente en el apartado 2.1 y 2.2.

(1) $+Vf1 = I1(R1 + R2 + R3) - I2.R3$

(2) $0 = -I1.R3 + I2(R3 + R4 + R5)$

Reemplazando con los valores del circuito, las ecuaciones quedarían de la siguiente forma:

(1) $10V = 13{,}5\text{k}\Omega\text{I}1 - 2\text{k}\Omega\text{I}2$

(2) $0\text{V} = -2\text{k}\Omega\text{I}1 + 18\text{k}\Omega\text{I}2$

- Despejamos "I2" en la ecuación (1):

(1) $\mathbf{10V = 13{,}5k\Omega I1 - 2k\Omega I2}$

$-2\text{k}\Omega I2 = 10V - 13{,}5\text{k}\Omega I1$

Multiplicando la ecuación por (-1) *se tiene*:

$2\text{k}\Omega I2 = -10V + 13{,}5\text{k}\Omega I1$

$$\boldsymbol{I2 = \frac{-10V + 13,5k\Omega I1}{2k\Omega}} \quad (\boldsymbol{a})$$

- Sustituimos la variable $(\boldsymbol{a})$ en la ecuación restante.

$(\boldsymbol{2})$ $\boldsymbol{0V = -2k\Omega I1 + 18k\Omega I2}$

$$0V = -2k\Omega I1 + 18k\Omega \left(\frac{-10V + 13,5k\Omega I1}{2k\Omega}\right)$$

$$0V = -2k\Omega I1 - 90 + \frac{243k\Omega}{2} I1$$

$$0V + 90V = \left(-2k\Omega + \frac{243k\Omega}{2}\right) I1$$

$$90V = \left(\frac{-4k\Omega + 243k\Omega}{2}\right) I1$$

$$90V = \frac{239k\Omega}{2} I1$$

$$\boldsymbol{I1 = \frac{90V}{\frac{239k\Omega}{2}}}$$

$$\boldsymbol{I1 = \frac{180V}{239k\Omega}}$$

$$\boldsymbol{I1} = 753,14 * 10^{-6} A => 753,14 \mu A$$

Reemplazamos en la ecuación $(\boldsymbol{a})$ el valor de I1.

$$\boldsymbol{I2 = \frac{-10V + 13,5k\Omega I1}{2k\Omega}} \quad (\boldsymbol{a})$$

$$I2 = \frac{-10V + 13,5\cancel{k\Omega}\left(\frac{180V}{239\cancel{k\Omega}}\right)}{2k\Omega}$$

$$I2 = \frac{-10V + \frac{2430\text{V}}{239}}{2\text{k}\Omega}$$

$$I2 = \frac{\frac{-2390V + 2430V}{239}}{2\text{k}\Omega}$$

$$I2 = \frac{40V}{478\text{k}\Omega}$$

$\boldsymbol{I2} = 83{,}68 * 10^{-6}A$ => $83{,}68\mu A$

Otro método muy utilizado para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales es la regla de Cramer, misma que se explicará más detenidamente en el apartado 2.1 y 2.2.

A continuación, se presenta la resolución del circuito, aplicando este método:

(1) $10V = 13{,}5\text{k}\Omega\text{I}1 - 2\text{k}\Omega\text{I}2$

(2) $0\text{V} = -2\text{k}\Omega\text{I}1 + 18\text{k}\Omega\text{I}2$

Matriz $[\boldsymbol{R}]$

$$\begin{bmatrix} 13{,}5 & -2 \\ -2 & 18 \end{bmatrix}$$

Matriz $[\boldsymbol{V}]$

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriz $[\boldsymbol{VR1}]$

$$\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}$$

Matriz $[\boldsymbol{VR2}]$

$$\begin{bmatrix} 13{,}5 & 10 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Cálculo del determinante para la matriz de resistencias:

Matriz $[\boldsymbol{R}]$

$$|\boldsymbol{R}| = \begin{vmatrix} 13{,}5 & -2 \\ -2 & 18 \end{vmatrix} = [(13{,}5 * 18) - (-2 * -2)] = 239\text{k}\Omega$$

Cálculo del determinante para las matrices de voltaje:

$$|\boldsymbol{VR1}| = \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} = [(10 * 18) - (-2 * 0)] = 180V$$

$$|\boldsymbol{VR2}| = \begin{vmatrix} 13{,}5 & 10 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = [(13{,}5 * 0) - (10 * (-2))] = 20V$$

2.2.3 Cálculo de intensidades

Fórmulas

$$\boldsymbol{I1} = \frac{|VR1|}{|R|}$$

$$I1 = \frac{180V}{239k\Omega}$$

$$I1 = 753{,}14\mu A$$

$$\boldsymbol{I2} = \frac{|VR2|}{|R|}$$

$$I2 = \frac{20V}{239k\Omega}$$

$$I2 = 83{,}68\mu A$$

$$\boldsymbol{I3} = \boldsymbol{I1} - \boldsymbol{I2}$$

$$I3 = 753{,}14\mu A - 83{,}68\mu A$$

$$I3 = 669{,}46\mu A$$

Paso 5: Determinar las intensidades eléctricas y voltajes de todos los componentes del circuito.

Para el circuito resuelto anteriormente, se puede definir que la corriente que circula a través de la fuente de voltaje (Vf), $R2$ y $R3$, corresponde a la corriente $I1$, que es igual a $753{,}14\mu A$.
La corriente que circula a través de $R4$ y $R5$, es igual a $83{,}68\mu A$.

La corriente que circula a través de $R3$, sería la diferencia entre la corriente $I1$ e $I2$, que equivale a $669{,}46\mu A$.

Finalmente, se establece que las caídas de tensión a través de voltajes de todos los componentes del circuito, serían:

$$\boldsymbol{VR1} = \boldsymbol{I1} * \boldsymbol{R1} \qquad \boldsymbol{VR2} = \boldsymbol{I1} * \boldsymbol{R2}$$

$$\boldsymbol{VR1} = 753{,}14\mu A * 3{,}5k\Omega \qquad \boldsymbol{VR2} = 753{,}14\mu A * 8k\Omega$$

$$\boldsymbol{VR1} = 2{,}64V \qquad \boldsymbol{VR2} = 6{,}03V$$

$$\boldsymbol{VR3 = I3 * R3}$$

$$\boldsymbol{VR3} = 669{,}46\mu A * 2k\Omega$$

$$\boldsymbol{VR3} = 1{,}34V$$

$$\boldsymbol{VR4 = I2 * R4}$$

$$\boldsymbol{VR4} = 83{,}68\mu A * 10k\Omega$$

$$\boldsymbol{VR4} = 837mV$$

$$\boldsymbol{VR5 = I2 * R5}$$

$$\boldsymbol{VR5} = 83{,}68\mu A * 6k\Omega$$

$$\boldsymbol{VR5} = 502mV$$

Para validar, el procedimiento realizado, se simuló el circuito, utilizando la herramienta Crocodile, tal como se observa a continuación.

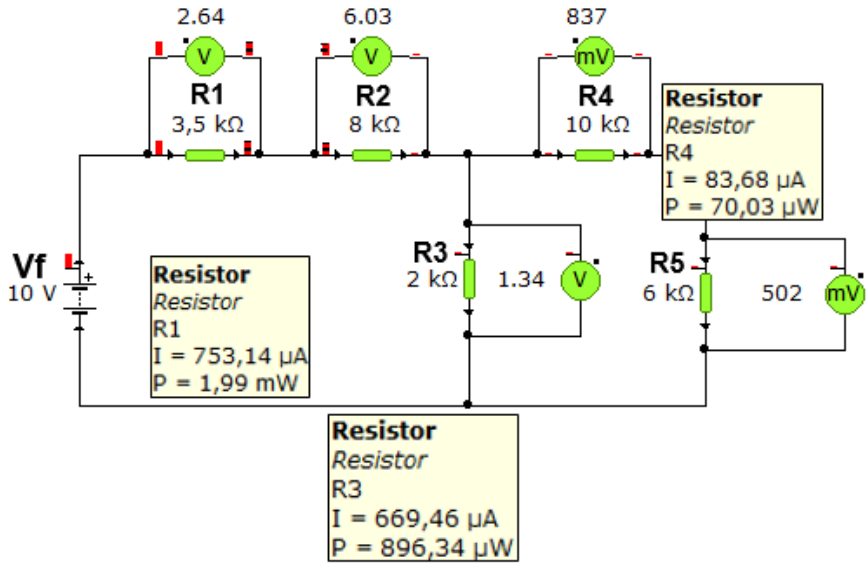


Figura 12. Comprobación de resultados utilizando Crocodile.

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 3 se puede apreciar que la mayoría de los valores obtenidos analíticamente coinciden con los valores en el simulador, lo que se debe a que trabajamos con una buena precisión en la notación científica.

Tabla 2. Comparación de los valores analíticos con los del simulador.

Descripción	**Valores obtenidos analíticamente**	**Valores obtenidos en el Crocodile**
I1	753.14 μA	753.14 μA
I2	83.68 μA	83.68 μA
I3	669,46 μA	669.46 uA
VR1	2.64 V	2.64 V
VR2	6.03 V	6.03 V
VR3	1.34 V	1.34 V
VR4	837 mV	837 mV
VR5	502 mV	502 mV

Sabías que…



Regla de Cramer

Esta fórmula explícita nace por el matemático Gabriel Cramer (1704-1752), quien publicó la regla para un número arbitrario de incógnitas en 1750, siendo la solución de un sistema de ecuaciones lineales con tantas ecuaciones como

incógnitas; sin embargo, para que la misma sea válida debe tener una solución única.

Preguntas de reflexión



¿Por qué actualmente la regla de Cramer es muy utilizada para resolver sistemas de ecuaciones lineales?

¿Existe alguna relación entre corrientes de mallas y LVK?

¿Por qué es necesario asignar el sentido de giro de las mallas y las polaridades en las fuentes de voltaje?

2.4 Resolución de ejercicios

A continuación, se resolverá un circuito con tres mallas, a través del método tratado, con variantes de resolución en el paso 4, donde se calculará el valor de las intensidades: $I1$, $I2$ e $I3$ y los voltajes de las resistencias: $R1$, $R2$, $R4$ y $R7$.

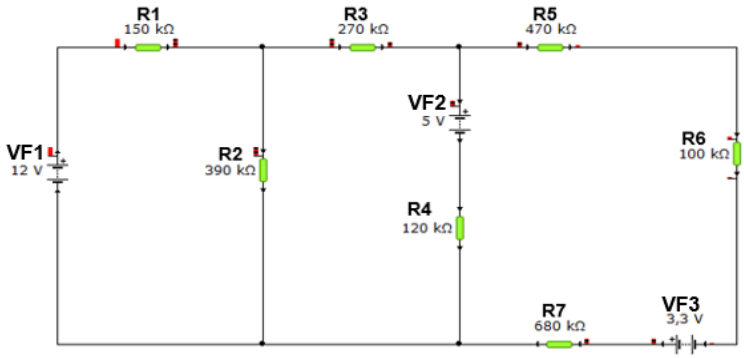


Figura 13. Circuito con tres mallas para aplicar corrientes de mallas.

Fuente: Elaboración propia.

Solución

Paso 1 y 2:

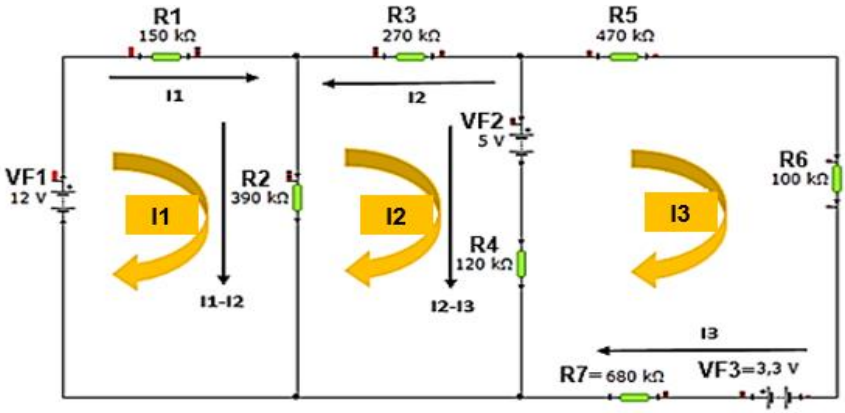


Figura 14. Circuito con tres mallas para aplicar corrientes de mallas – Solución.

Fuente: Elaboración propia.

Paso 3:

Planteamiento de ecuaciones

(1) $+Vf1 = I1.R1 + R2(I1 - I2)$

(2) $-Vf2 = R2(I2 - I1) + I2.R3 - R4(I2 - I3)$

(3) $Vf2 + Vf3 = R4(I3 - I2) + I3.R5 + I3.R6 + I3.R7$

Reemplazando con los valores del circuito, las ecuaciones quedarían de la siguiente forma:

(1) $12V = 540k\Omega I1 - 390k\Omega I2$

(2) $-5V = -390k\Omega I1 + 780k\Omega I2 - 120k\Omega I3$

(3) $8{,}3V = -120k\Omega I2 + 1370k\Omega I3$

2.4.1 Resolución del circuito aplicando el método de sustitución

Este método consiste en despejar una de las incógnitas de cualquier ecuación del sistema y realizar sustituciones sucesivas en las ecuaciones restantes, hasta obtener una ecuación de primer grado con una sola incógnita.

Finalmente, se reemplazará el valor de la incógnita calculado, en las ecuaciones previamente establecidas, hasta determinar el valor de todas las incógnitas del sistema.

A continuación, se aplicará el procedimiento indicado, para el circuito de la Figura 14.

(1) $12V = 540k\Omega I1 - 390k\Omega I2$

$(2) - 5V = -390k\Omega I1 + 780k\Omega I2 - 120k\Omega I3$

$(3)\ \ 8{,}3V = -120k\Omega I2 + 1370k\Omega I3$

- Despejamos "I2" en la ecuación 1:

$(1)\ \ \mathbf{12V = 540k\Omega I1 - 390k\Omega I2}$

$-390k\Omega I2 = 12V - 540k\Omega I1$

Multiplicando la ecuación por (-1) *se tiene*:

$390k\Omega I2 = -12V + 540k\Omega I1$

$$\boldsymbol{I2 = \frac{-12V + 540k\Omega I1}{390k\Omega}} \quad (a)$$

- Sustituimos la ecuación (a) en las ecuaciones restantes (2 y 3):

$(2)\ \ \mathbf{-5V = -390k\Omega I1 + 780k\Omega I2 - 120k\Omega I3}$

$$-5V = -390k\Omega I1 + 780k\Omega\left(\frac{-12V + 540k\Omega I1}{390k\Omega}\right) - 120k\Omega I3$$

$-5V = -390k\Omega I1 - 24V + 1080k\Omega I1 - 120k\Omega I3$

$(-5 + 24)V = I1(-390k\Omega + 1080k\Omega) - 120k\Omega I3$

$\mathbf{19V = 690k\Omega I1 - 120k\Omega I3} \quad (4)$

$(3)\ \ \mathbf{8{,}3V = -120k\Omega I2 + 1370k\Omega I3}$

$$8{,}3V = -120k\Omega\left(\frac{-12V + 540k\Omega I1}{390k\Omega}\right) + 1370k\Omega I3$$

$$8{,}3V = \frac{48V}{13} - \frac{2160k\Omega}{13} I1 + 1370k\Omega I3$$

$$\left(8{,}3 - \frac{48}{13}\right)V = -\frac{2160k\Omega}{13} I1 + 1370k\Omega I3$$

$$\boldsymbol{\frac{599V}{130} = -\frac{2160k\Omega}{13} I1 + 1370k\Omega I3} \quad (5)$$

- Despejamos cualquiera de las variables de la ecuación 4 (en este caso $I3$):

$$\boldsymbol{19V = 690k\Omega I1 - 120k\Omega I3} \quad (4)$$

$$-120k\Omega I3 = 19V - 690k\Omega I1$$

Multiplicando la ecuación por (-1) *se tiene*:

$$120k\Omega I3 = -19V + 690k\Omega I1$$

$$\boldsymbol{I3 = \frac{-19V + 690k\Omega I1}{120k\Omega}}$$

- Reemplazamos la variable encontrada ($I3$) en la ecuación 5:

$$\frac{599V}{130} = -\frac{2160k\Omega}{13} I1 + 1370k\Omega I3 \quad (5)$$

$$\frac{599V}{130} = -\frac{2160k\Omega}{13} I1 + 1370\cancel{k\Omega}\left(\frac{-19V + 690k\Omega I1}{120\cancel{k\Omega}}\right)$$

$$\frac{599V}{130} = -\frac{2160k\Omega}{13} I1 - \frac{2603V}{12} + \frac{94530k\Omega}{12} I1$$

$$\left(\frac{599}{130} + \frac{2603}{12}\right) V = \left(-\frac{2160k\Omega}{13} + \frac{94530k\Omega}{12}\right) I1$$

$$\left(\frac{338390 + 7188}{1560}\right) V = \left(\frac{-25920k\Omega + 1228890k\Omega}{156}\right) I1$$

$$\left(\frac{345578}{1560}\right) V = \frac{1202970k\Omega}{156} I1$$

$$I1 = \frac{\frac{345578V}{1560}}{\frac{1202970k\Omega}{156}}$$

$$I1 = \frac{345578V}{12029700k\Omega}$$

$$I1 = 28{,}73 * 10^{-6} A$$

$$\boldsymbol{I1 = 28{,}73\ \mu A}$$

- Sustituimos el valor de $I1$ en la ecuación 4:

$$\mathbf{19V = 690k\Omega I1 - 120k\Omega I3} \quad \mathbf{(4)}$$

$$19V = 690\cancel{k\Omega}\left(\frac{345578V}{12029700\cancel{k\Omega}}\right) - 120k\Omega I3$$

$$19V = \frac{238448820V}{12029700} - 120k\Omega I3$$

$$-120k\Omega I3 = \left(19 - \frac{238448820}{12029700}\right)V$$

$$-120k\Omega I3 = \left(\frac{228564300 - 238448820}{12029700}\right)V$$

$$-120k\Omega I3 = \left(-\frac{9884520}{12029700}\right)V$$

Multiplicando la ecuación por (-1) *se tiene*:

$$120k\Omega I3 = \left(\frac{9884520}{12029700}\right)V$$

$$I3 = \frac{\frac{9884520}{12029700}V}{120k\Omega}$$

$$I3 = \frac{9884520V}{1443564000k\Omega}$$

$$I3 = 6{,}845 * 10^{-6}A$$

$$\boldsymbol{I3 = 6,85\ \mu A}$$

- Para encontrar $I2$, reemplazamos en la ecuación (a) el valor de la variable $I1$.

$$\boldsymbol{I2 = \frac{-12V + 540k\Omega I1}{390k\Omega}} \quad (a)$$

$$I2 = \frac{-12V + 540k\Omega \left(\frac{345578V}{12029700k\Omega}\right)}{390k\Omega}$$

$$I2 = \frac{-12V + \frac{186612120V}{12029700}}{390k\Omega}$$

$$I2 = \frac{\frac{-2405940V + 3110202V}{200495}}{390k\Omega}$$

$$I2 = \frac{704262V}{78193050k\Omega}$$

$$I2 = 9{,}007 * 10^{-6}A$$

$$\boldsymbol{I2 = 9,01\ \mu A}$$

2.4.2 Resolución del circuito aplicando la regla de Cramer

La regla de Cramer se aplica en sistemas que cumplan con las siguientes condiciones:

- El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.

- El determinante de la matriz de los coeficientes debe ser distinto a cero.
- Su representación es la siguiente:

$$A_{11}\, x^1 + \ldots + A_{1n}\, x^n = b_1$$

$$A_{21}\, x^1 + \ldots + A_{2n}\, x^n = b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_{n1}\, x^1 + \ldots + A_{nn}\, x^n = b_n$$

Donde podemos definir que, A es la matriz formada por los coeficientes de las incógnitas $x^1, \ldots, x^n$, y B es la matriz formada por los coeficientes $b_1, \ldots, b_n$; de tal forma que se tiene:

$$[A][x] = [B]$$

Las incógnitas x_i, se obtienen a partir de la siguiente fórmula:

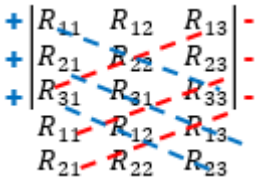
$$xi = \frac{|Ai|}{|A|}$$

Donde la matriz $[Ai]$ se obtiene de la matriz $[A]$, sustituyendo la columna i-ésima por los elementos de $[B]$. En el campo de los circuitos eléctricos, la matriz $[A]$, corresponde a una matriz de resistencias $[R]$ y la matriz $[B]$ corresponde a la matriz de voltajes $[V]$.

El determinante de una matriz se puede calcular, como la resta entre los productos cruzados de la matriz, es decir, considerando como término positivo la suma de los productos diagonales de izquierda hacia derecha

y como negativo la suma de los productos diagonales de derecha hacia izquierda.

La regla de Sarrus es una forma práctica de calcular determinantes en matrices de 3×3, que consiste en agregar las dos primeras filas del sistema de ecuaciones al final de cada matriz, tal como se indica a continuación:



$$|R|$$

$$= \begin{vmatrix} \left((R_{11} * R_{22} * R_{33}) + (R_{21} * R_{31} * R_{13}) + (R_{31} * R_{12} * R_{23})\right) \\ -((R_{13} * R_{22} * R_{31}) + (R_{23} * R_{31} * R_{11}) + (R_{33} * R_{12} * R_{21})) \end{vmatrix}$$

Como se indica en el procedimiento anterior, las líneas de color rojo indican un producto positivo y las líneas de color azul, un producto negativo.

A continuación, se aplicará el procedimiento indicado, para el circuito de la Figura 14.

(1) $12V = 540k\Omega I1 - 390k\Omega I2$

(2) $-5V = -390k\Omega I1 + 780k\Omega I2 - 120k\Omega I3$

(3) $8{,}3V = -120k\Omega I2 + 1370k\Omega I3$

La matriz de resistencias $[R]$ para el sistema de ecuaciones planteado es la siguiente:

$$[\boldsymbol{R}] = \begin{bmatrix} 540 & -390 & 0 \\ -390 & 780 & -120 \\ 0 & -120 & 1370 \end{bmatrix}$$

La matriz de voltajes $[V]$, sería:

$$[\boldsymbol{V}] = \begin{bmatrix} 12 \\ -5 \\ 8{,}3 \end{bmatrix}$$

La matriz [VR1] sería:

$$[\boldsymbol{VR1}] = \begin{bmatrix} 12 & -390 & 0 \\ -5 & 780 & -120 \\ 8{,}3 & -120 & 1370 \end{bmatrix}$$

La matriz [VR2] sería:

$$[\boldsymbol{VR2}] = \begin{bmatrix} 540 & 12 & 0 \\ -390 & -5 & -120 \\ 0 & 8{,}3 & 1370 \end{bmatrix}$$

La matriz [VR3] sería:

$$[\boldsymbol{VR3}] = \begin{bmatrix} 540 & -390 & 12 \\ -390 & 780 & -5 \\ 0 & -120 & 8{,}3 \end{bmatrix}$$

A continuación, se procederá a calcular, el determinante de las matrices anteriormente indicadas:

$$|R| = \begin{vmatrix} 540 & -390 & 0 \\ -390 & 780 & -120 \\ 0 & -120 & 1370 \\ 540 & -390 & 0 \\ -390 & 780 & -120 \end{vmatrix} = [577044000 - 216153000]$$

$$= 360891000$$

$$|VR1| = \begin{vmatrix} 12 & -390 & 0 \\ -5 & 780 & -120 \\ 8{,}3 & -120 & 1370 \\ 12 & -390 & 0 \\ -5 & 780 & -120 \end{vmatrix} = [13211640 - 2844300]$$

$$= 10367340$$

$$|VR2| = \begin{vmatrix} 540 & 12 & 0 \\ -390 & -5 & -120 \\ 0 & 8{,}3 & 1370 \\ 540 & 12 & 0 \\ -390 & -5 & -120 \end{vmatrix} = [-3699000 - (-6949440)]$$

$$= 3250440$$

$$|VR3| = \begin{vmatrix} 540 & -390 & 12 \\ -390 & 780 & -5 \\ 0 & -120 & 8{,}3 \\ 540 & -390 & 12 \\ -390 & 780 & -5 \end{vmatrix} = [4057560 - 1586430]$$

$$= 2471130$$

Finalmente, para determinar las corrientes que circulan en el circuito, se realiza los siguientes cálculos:

$$\boldsymbol{I1} = \frac{|VR1|}{|R|}$$

$$I1 = \frac{10367340V}{360891000k\Omega}$$

$$I1 = 28{,}73\mu A$$

$$\boldsymbol{I2} = \frac{|VR2|}{|R|}$$

$$I2 = \frac{3250440V}{360891000k\Omega}$$

$$I2 = 9{,}01\mu A$$

$$\boldsymbol{I3} = \frac{|VR3|}{|R|}$$

$$I3 = \frac{2471130V}{360891000k\Omega}$$

$$I3 = 6{,}85\mu A$$

$$\boldsymbol{IR2 = I1 - I2}$$

$$IR2 = 28{,}73\mu A - 9{,}01\mu A$$

$$IR2 = 19{,}72\mu A$$

$$\boldsymbol{IR4 = I2 - I3}$$

$$IR4 = 9{,}01\mu A - 6{,}85\mu A$$

$$IR4 = 2{,}16\mu A$$

Es importante tener presente que los cálculos realizados corresponden para un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, pudiendo aplicar un procedimiento similar si el sistema de ecuaciones corresponde a un número menor o mayor que 3, siempre y cuando el número de ecuaciones sea igual al número de incógnitas del sistema.

2.4.3 Resolución del circuito aplicando el método de Gauss-Jordán

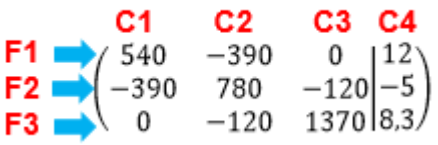
Este método consiste en transformar un sistema de ecuaciones lineales, en otro equivalente, de forma escalonada reducida. Es decir, convierte la matriz de resistencias $[R]$, donde se encuentran los coeficientes de las variables, en una matriz identidad.

Otro concepto que requiere el método es de la matriz aumentada, que consiste en formar una matriz con los coeficientes de la matriz $[R]$ y los coeficientes de la matriz $[V]$, tal como se indica a continuación para un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} R_{11} & R_{12} & R_{13} & V_1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & V_2 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & V_3 \end{array}\right)$$

Para obtener la matriz identidad, se realizan operaciones elementales de fila en la matriz aumentada, tales como: suma, resta y/o multiplicación, teniendo en cuenta que serán aplicadas a toda la fila o columna en su caso, para hallar la solución del sistema de ecuaciones lineales.

A continuación, se aplicará el procedimiento anteriormente descrito, para la resolución del circuito de la figura 2:



En el esquema anterior, se ha utilizado las nomenclaturas: F1, F2, F3, C1, C2, C3 y C4, para indicar cada una de las filas y columnas de la matriz aumentada.

A continuación, se dividirá cada uno de los términos de la F1, para el coeficiente R_{11}, con la finalidad de lograr la unidad para este coeficiente, lo cual constituye el primer paso para formar una matriz identidad:

$$\frac{\boldsymbol{F1}}{\boldsymbol{540}} => \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -13/18 & 0 & 1/45 \\ -390 & 780 & -120 & -5 \\ 0 & -120 & 1370 & 8{,}3 \end{array}\right)$$

Con la finalidad de convertir en cero los coeficientes que se encuentren en la primera columna de la matriz (C1), se tiene que realizar la siguiente operación en la F2:

$$\boldsymbol{F2 + 390F1} => \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -13/18 & 0 & 1/45 \\ 0 & 1495/3 & -120 & 11/3 \\ 0 & -120 & 1370 & 8{,}3 \end{array}\right)$$

Ahora, se dividirá la F2 para el coeficiente R_{22}, con la finalidad de lograr la unidad para este coeficiente:

$$\frac{\boldsymbol{F2}}{\frac{\boldsymbol{1495}}{\boldsymbol{3}}} => \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -13/18 & 0 & 1/45 \\ 0 & 1 & -\frac{72}{299} & \frac{11}{1495} \\ 0 & -120 & 1370 & 8{,}3 \end{array}\right)$$

Procedemos a convertir en ceros los coeficientes de la segunda columna de la matriz (C2), realizando los siguientes procedimientos:

$$\boldsymbol{F1 + \frac{13}{18}F2}$$

$$\boldsymbol{F3 + 120F2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{23} & 19/690 \\ 0 & 1 & -\frac{72}{299} & \frac{11}{1495} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{27457}{4009900} \end{array}\right)$$

Como penúltimo punto, se dividirá la F3 para el coeficiente R_{33}, con la finalidad de lograr la unidad para este coeficiente:

$$\boldsymbol{\frac{F3}{\frac{400990}{299}}} => \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{23} & 19/690 \\ 0 & 1 & -\frac{72}{299} & \frac{11}{1495} \\ 0 & 0 & \frac{400990}{299} & \frac{27457}{2990} \end{array}\right)$$

Finalmente, se transformarán a ceros los coeficientes de la tercera columna de la matriz (C3), a través de las siguientes operaciones:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{7948294}{276683100} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10798684}{1198960100} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{27457}{4009900} \end{array}\right) \begin{array}{l} I1 \\ I2 \\ I3 \end{array}$$

$$\boldsymbol{F1 + \frac{4}{23}F3}$$

$$\boldsymbol{F2 + \frac{72}{299} F3}$$

Podemos notar, que, a partir de este método, obtenemos directamente el valor de las intensidades I1, I2 e I3, las cuales están expresadas en fracciones:

$$\boldsymbol{I1} = \frac{7948294V}{276683100k\Omega}$$

$$\boldsymbol{I1} = 28{,}73 * 10^{-6}A => 28{,}73\ \mu A$$

$$\boldsymbol{I2} = \frac{10798684V}{1198960100k\Omega}$$

$$\boldsymbol{I2} = 9{,}007 * 10^{-6}A => 9{,}01\ \mu A$$

$$\boldsymbol{I3} = \frac{27457V}{4009900k\Omega}$$

$$\boldsymbol{I3} = 6{,}85 * 10^{-6}A => 6{,}85\ \mu A$$

2.4.4 Resolución del circuito aplicando el método de eliminación Gaussiana

El método de Gauss o eliminación Gaussiana transforma la matriz aumentada en una matriz triangular superior (escalonada), a través de operaciones elementales de fila, como: suma, resta y/o multiplicación. Sin embargo, debemos tener en cuenta que:

- Un sistema de ecuaciones lineales tiene una única solución, o es compatible determinado, si y sólo si su forma escalonada tiene tantas filas no nulas como incógnitas.
- Si un sistema de ecuaciones lineales tiene más incógnitas que ecuaciones, y ya está en su forma escalonada, entonces hay infinitas soluciones, es decir, es indeterminado.

Al obtener la matriz triangular superior, tenemos como resultado un sistema equivalente de ecuaciones lineales, que proporciona el valor de la corriente I3, la cual se sustituirá en las ecuaciones restantes, para determinar los valores de las corrientes I1 e I2 faltantes.

A continuación, se aplicará el procedimiento anteriormente descrito, para la resolución del circuito de la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, teniendo en cuenta que este método es similar al de Gauss-Jordán, con la única diferencia que no se transformarán a ceros los coeficientes de la tercera columna de la matriz (C3).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 540 & -390 & 0 & 12 \\ -390 & 780 & -120 & -5 \\ 0 & -120 & 1370 & 8{,}3 \end{array}\right)$$

$$= \boldsymbol{F1/540}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -13/18 & 0 & 1/45 \\ -390 & 780 & -120 & -5 \\ 0 & -120 & 1370 & 8{,}3 \end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{F2 + 390F1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -13/18 & 0 & 1/45 \\ 0 & 1 & -\frac{72}{299} & \frac{11}{1495} \\ 0 & -120 & 1370 & 8{,}3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \boldsymbol{\frac{F2}{\frac{1495}{3}}} \end{matrix}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -13/18 & 0 & 1/45 \\ 0 & 1495/3 & -120 & 11/3 \\ 0 & -120 & 1370 & 8{,}3 \end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{F1 + \frac{13}{18} F2}$$

$$\boldsymbol{F3 + 120 F2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{23} & 19/690 \\ 0 & 1 & -\frac{72}{299} & \frac{11}{1495} \\ 0 & 0 & \frac{400990}{299} & \frac{27457}{2990} \end{array}\right) = \boldsymbol{\frac{F3}{\frac{400990}{299}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{23} & 19/690 \\ 0 & 1 & -\frac{72}{299} & \frac{11}{1495} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{27457}{4009900} \end{array}\right)$$

Finalizado el método, comprobamos que obtenemos un nuevo sistema de ecuaciones lineales, donde conocemos el valor de I3, el cual será reemplazado en las ecuaciones resultantes con la finalidad de determinar las intensidades I1 e I2.

Sistema equivalente de ecuaciones lineales

(1) $\frac{19V}{690k\Omega} = I1 - \frac{4}{23} k\Omega I3$

(2) $\frac{11V}{1495k\Omega} = I2 - \frac{72}{299} k\Omega I3$

(3) $I3 = \frac{2745V}{4009900k\Omega}$

Intensidad I3

$$\boldsymbol{I3 = \frac{27457V}{4009900k\Omega}}$$

$$I3 = 6{,}85 * 10^{-6}A$$

$$\boldsymbol{I3 = 6{,}85\ \mu A}$$

Se sustituye el valor de I3 en la ecuación (2)

$$(2) \quad \boldsymbol{\frac{11V}{1495k\Omega} = I2 - \frac{72}{299}k\Omega I3}$$

$$\frac{11V}{1495k\Omega} = I2 - \frac{72}{299}\cancel{k\Omega}\left(\frac{27457V}{4009900\cancel{k\Omega}}\right)$$

$$\frac{11V}{1495k\Omega} = I2 - \frac{1976904V}{1198960100}$$

$$I2 = \frac{11V}{1495k\Omega} + \frac{1976904V}{1198960100}$$

$$I2 = \frac{(8821780 + 1976904)V}{1198960100k\Omega}$$

$$I2 = \frac{10798684V}{1198960100k\Omega}$$

$$I2 = 9{,}007 * 10^{-6}A$$

$$\boldsymbol{I2 = 9{,}01\ \mu A}$$

Se sustituye el valor de I3 en la ecuación (1)

$$(1) \quad \frac{19V}{690k\Omega} = I1 - \frac{4}{23}k\Omega I3$$

$$\frac{19V}{690k\Omega} = I1 - \frac{4}{23}\cancel{k\Omega}\left(\frac{27457V}{4009900\cancel{k\Omega}}\right)$$

$$\frac{19V}{690k\Omega} = I1 - \frac{109828V}{92227700}$$

$$I1 = \frac{19V}{690k\Omega} + \frac{109828V}{92227700}$$

$$I1 = \frac{\left(\frac{7618810}{3} + 109828\right)V}{92227700k\Omega}$$

$$I1 = \frac{\frac{(7618810 + 329484)V}{3}}{92227700k\Omega}$$

$$I1 = \frac{7948294V}{276683100k\Omega}$$

$$I1 = 28{,}73 * 10^{-6}A$$

$$I1 = 28{,}73\ \mu A$$

A continuación, se procederá a comprobar la validez de las corrientes calculadas, sustituyendo estos valores en las ecuaciones originales del circuito de la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**. Cabe s

eñalar, que este procedimiento debe ser aplicado a cualquiera de los métodos para la resolución de circuitos eléctricos que se utilice.

Comprobación de resultados con las ecuaciones originales

$(1)\ 12V = 540k\Omega I1 - 390k\Omega I2$

$(2) - 5V = -390k\Omega I1 + 780k\Omega I2 - 120k\Omega I3$

$(3)\ 8{,}3V = \qquad -120k\Omega I2 + 1370k\Omega I3$

$(1)\ \mathbf{12V = 540k\Omega I1 - 390k\Omega I2}$

$$12V = 540\cancel{k\Omega}\left(\frac{7948294V}{276683100\cancel{k\Omega}}\right) - 390\cancel{k\Omega}\left(\frac{10798684V}{1198960100\cancel{k\Omega}}\right)$$

$$12V = \frac{4292078760V}{276683100} - \frac{4211486760V}{1198960100}$$

$$12V = \frac{(4292078760 - 971881560)V}{276683100}$$

$$12V = \frac{3320197200V}{276683100}$$

$$\mathbf{12V = 12V}$$

$(2)\ \mathbf{-5V = -390k\Omega I1 + 780k\Omega I2 - 120k\Omega I3}$

$$-5V = -390\cancel{k\Omega}\left(\frac{7948294V}{276683100\cancel{k\Omega}}\right) + 780\cancel{k\Omega}\left(\frac{10798684V}{1198960100\cancel{k\Omega}}\right) - 120\cancel{k\Omega}\left(\frac{2745V}{4009900\cancel{k\Omega}}\right)$$

$$-5V = -\frac{3099834660V}{276683100} + \frac{8422973520V}{1198960100} - \frac{3294840V}{4009900}$$

$$-5V = \frac{(-3099834660 + 1943763120 - 227343960)V}{276683100}$$

$$-5V = -\frac{1383415500V}{276683100}$$

$$\boldsymbol{-5V = -5V}$$

(3) $\boldsymbol{8,3V = -120k\Omega I2 + 1370k\Omega I3}$

$$8{,}3V = -120\cancel{k\Omega}\left(\frac{10798684V}{1198960100\cancel{k\Omega}}\right) + 1370\cancel{k\Omega}\left(\frac{27457V}{4009900\cancel{k\Omega}}\right)$$

$$8{,}3V = -\frac{1295842080V}{1198960100} + \frac{37616090V}{4009900}$$

$$8{,}3V = \frac{(-1295842080 + 11247210910)V}{1198960100}$$

$$8{,}3V = \frac{9951368830V}{1198960100}$$

$$\boldsymbol{8,3V = 8,3V}$$

Paso 5:

Cálculo de voltajes

Fórmula

$$\boldsymbol{V = I * R}$$

$$\boldsymbol{VR1 = I1 * R1}$$
$$\boldsymbol{VR1} = 28{,}73\mu A * 150k\Omega$$
$$\boldsymbol{VR1} = 4{,}31V$$

$$\boldsymbol{VR2 = IR2 * R2}$$
$$\boldsymbol{VR2} = 19{,}72\mu A * 390k\Omega$$
$$\boldsymbol{VR2} = 7{,}69V$$

$$\boldsymbol{VR3 = I2 * R3}$$
$$\boldsymbol{VR3} = 9{,}01\mu A * 270k\Omega$$
$$\boldsymbol{VR3} = 2{,}43V$$

$$\boldsymbol{VR4 = IR4 * R4}$$
$$\boldsymbol{VR4} = 2{,}16\mu A * 120k\Omega$$
$$\boldsymbol{VR4} = 259{,}13mV$$

$$\boldsymbol{VR5 = I3 * R5}$$
$$\boldsymbol{VR5} = 6{,}85\mu A * 470k\Omega$$
$$\boldsymbol{VR5} = 3{,}22V$$

$$\boldsymbol{VR6 = I3 * R6}$$
$$\boldsymbol{VR6} = 6{,}85\mu A * 100k\Omega$$
$$\boldsymbol{VR6} = 684{,}73mV$$

$$\boldsymbol{VR7 = I3 * R7}$$
$$\boldsymbol{VR7} = 6{,}85\mu A * 680k\Omega$$
$$\boldsymbol{VR7} = 4{,}66mV$$

Comprobación en Crocodile

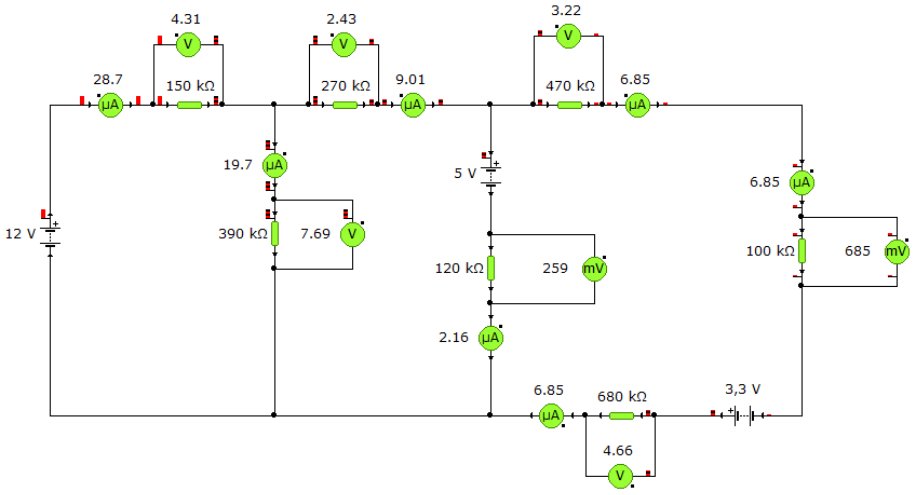


Figura 15. Comprobación en Crocodile.

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 2.4 se puede apreciar que la mayoría de los valores obtenidos por los diferentes métodos aplicados coinciden, indicando un alto grado de precisión y certeza para resolver un problema de corrientes de malla.

Tabla 3. Comparación de los valores obtenidos con Crocodile del circuito de tres mallas.

Descripción	**Valores obtenidos analíticamente (Cramer)**	**Valores obtenidos analíticamente (Gauss-jordan)**	**Valores obtenidos en el Crocodile**
I1	28.7 uA	28.7 uA	28.7 uA
I2	9.01 uA	9.01 uA	9.01 uA
I3	6.85 uA	6.85 uA	6.85 uA
I4	19.7 uA	19.7 uA	19.7 uA
I5	2.16 uA	2.16 uA	2.16 uA
VR1	4.31 V	4.31 V	4.31 V
VR2	7.69 V	7.69 V	7.69 V

VR3	2.43 V	2.43 V	2.43 V
VR4	259,2 mV	259,1 mV	259mV
VR5	3.22 V	3.22 V	3.22 V
VR6	685 mV	685 mV	685 mV
VR7	4.66 V	4.66 V	4.66 V

Sabías que…

storia de los sistemas de ecuaciones lineales



Los sistemas de ecuaciones lineales fueron ya resueltos por los babilonios a partir del periodo de 1700 a. C. a 1700 d. C., los cuales llamaban a las incógnitas con palabras tales como longitud, anchura, área, o volumen, sin tener relación con problemas de medida.

Preguntas de reflexión



¿Es necesario comprobar los resultados obtenidos a través de un simulador de circuitos eléctricos?

¿Por qué están importante definir correctamente las ecuaciones?

¿Qué método para resolver sistemas de ecuaciones lineales es de su preferencia? ¿Por qué?

CAPÍTULO III

3 MÉTODO DE VOLTAJES DE NODO

3.1 Objetivos

- Comprender el fundamento teórico del método de voltajes de nodo, basado en la Ley de Corrientes de Kirchhoff.
- Identificar correctamente los nodos de un circuito, asignar voltajes relativos y establecer un nodo de referencia.
- Plantear las ecuaciones correspondientes a los nodos del circuito y obtener sus valores mediante sustitución, regla de Cramer o el método de Gauss-Jordán.

3.2 Introducción

Para conocer el comportamiento de un circuito es necesario determinar los valores de corriente y voltaje presentes en sus diferentes elementos. Si existen varias ramas y pocos nodos, el análisis puede realizarse tomando como incógnitas los voltajes asignados a cada nodo. De esta idea surge el método de voltajes de nodo, conocido también como análisis nodal.

El procedimiento toma como base la Primera Ley de Kirchhoff o Ley de Corrientes de Kirchhoff. Esta establece que, al analizar un nodo, la suma algebraica de las corrientes asociadas a él debe ser igual a cero. En términos sencillos, la cantidad de corriente que llega a un punto debe guardar correspondencia con la que sale de él. En condiciones de corriente continua y régimen estacionario, este comportamiento responde al principio de conservación de la carga eléctrica.

Para desarrollar el análisis se selecciona uno de los nodos del circuito como referencia y se le asigna un potencial de cero voltios. A partir de este punto se definen los voltajes de los nodos restantes. Luego, utilizando la Ley de Ohm y la Ley de Corrientes de Kirchhoff, se plantean las ecuaciones necesarias para determinar los valores desconocidos.

Una de las ventajas de este procedimiento aparece cuando el número de nodos es menor que el número de mallas del circuito, ya que puede reducirse la cantidad de ecuaciones que deben resolverse. Por esta razón, antes de elegir un método de análisis conviene observar la configuración del circuito y determinar cuál permite trabajar con menos incógnitas.

En este capítulo se desarrollará el procedimiento de análisis nodal mediante ejercicios resueltos paso a paso. Los sistemas de ecuaciones obtenidos podrán solucionarse empleando sustitución, regla de Cramer, eliminación gaussiana o Gauss-Jordán, según las características de cada ejercicio. Posteriormente, algunos circuitos serán representados en Crocodile para contrastar los valores obtenidos mediante cálculo con los proporcionados por la simulación.

La finalidad no es únicamente obtener un resultado numérico. El análisis permitirá reconocer qué sucede con las corrientes en cada nodo, interpretar los voltajes calculados y comprobar si las ecuaciones planteadas representan correctamente el comportamiento del circuito.

3.3 Conceptos básicos

3.3.1 Definición

Este método también llamado análisis nodal, análisis de nodos o método de tensiones de nodo, se centra en un procedimiento general de encontrar el voltaje en los nodos, analizando los circuitos permitiéndonos definir las ecuaciones y calcular las corrientes en las ramas. El voltaje de nodos se basa en la ley de Ohm y la Ley de Kirchhoff de corrientes, esta última plantea que las cargas no se pueden acumular en ningún nodo.

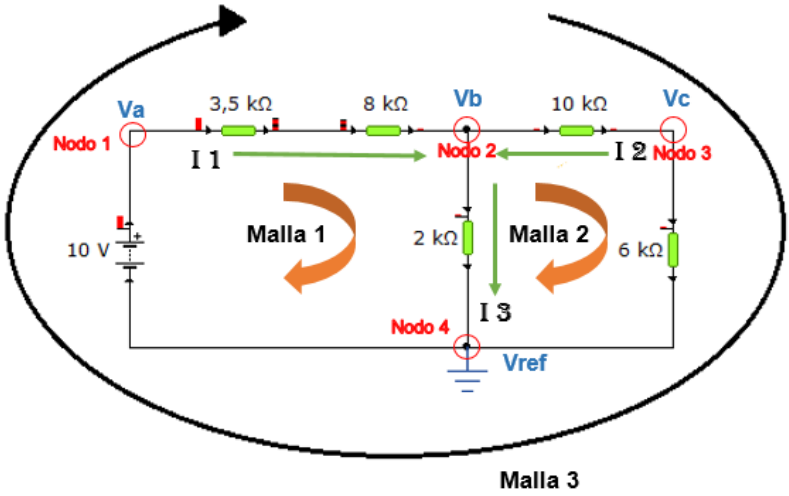


Figura 16. Voltaje de nodos.

Fuente: Elaboración propia.

3.3.2 Metodología

El método de voltajes de nodo se comprende en los siguientes pasos:

Paso 1: Localizar los nodos del circuito.

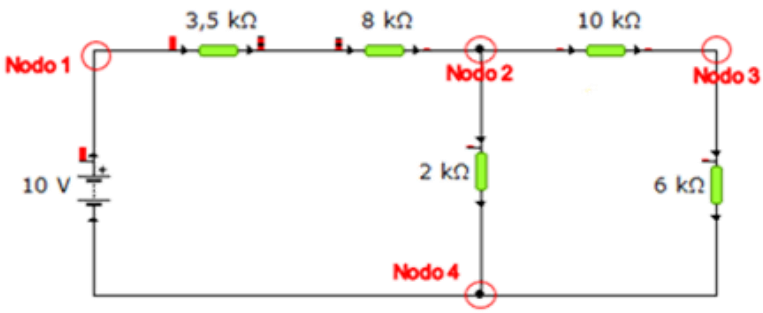


Figura 17. Nodos de un circuito.

Fuente: Elaboración propia.

Paso 2: Seleccionar el nodo de referencia, este puede ser el nodo con más conexiones, y nos permitirá un mejor análisis del circuito. Cabe recalcar que el voltaje de nodo de referencia es igual a 0.

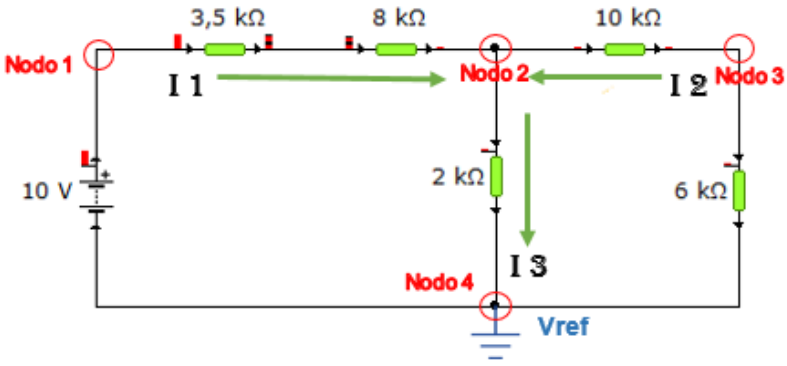


Figura 18. Asignar el nodo de referencia.

Fuente: Elaboración propia.

Paso 3: Asignar un nombre al voltaje de cada nodo para que estos se puedan identificar de forma rápida y sencilla.

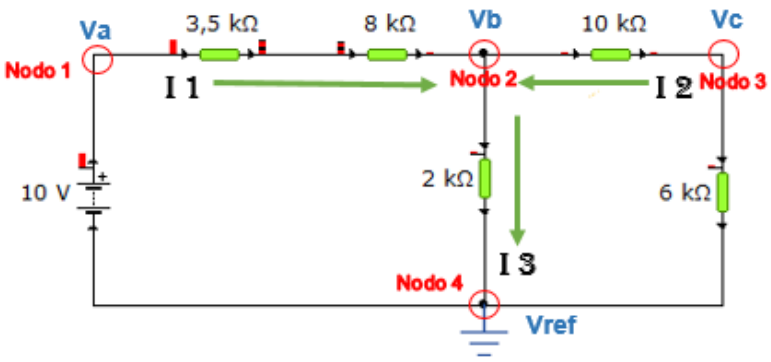


Figura 19. Asignar nombres a los voltajes.

Fuente: Elaboración propia.

Paso 4: Plantear las ecuaciones de acuerdo con las leyes de Kirchhoff de corrientes de acuerdo a cada nodo.

Para conocer el número de ecuaciones que se deben plantear realizamos lo siguiente:

Ecuaciones = # Nodos -1

Ecuaciones = 4 -1=

3 ecuaciones

Estas también se pueden calcular contando todos los nodos, teniendo como excepción el nodo de referencia.

Nodo Va

En esta identificamos la fuente de voltaje y el nodo de referencia como se encuentra indicado en la , se realiza el diferencial de voltaje en la fuente.

$$Va - Vref = 10V$$

$$Va - 0 = 10V$$

$$Va = 10V$$

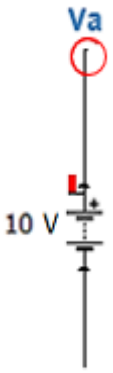


Figura 20. Nodo Va.

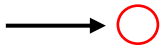
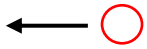
Fuente: Elaboración propia.

Se considera que el nodo de referencia tiene un voltaje de 0.

Nodo Vb

Identificamos las corrientes que pasan por cada una de las resistencias del nodo Vb, dependiendo del sentido de la corriente se asignará el signo a las ecuaciones.

Tabla 4. Asignación del signo de las ecuaciones.

Descripción	**Sentido de la corriente de malla**	**Signo asignado**
Cuando la corriente ingresa al nodo		-
Cuando la corriente sale del nodo		+

Aplicando la ley de Kirchhoff de corrientes, procederemos a plantear las ecuaciones que nos permitirán resolver el circuito, este método nos dice que la suma de corriente es igual a cero.

Analizamos las corrientes que pasan por el **Nodo Vb.**

$$\sum I = 0$$

Ecuación 4. Sumatoria de corrientes.

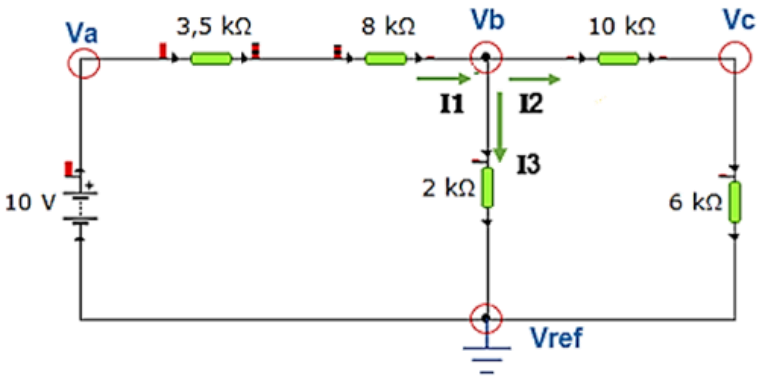


Figura 21. Corrientes que pasan por el Nodo Vb.

Fuente: Elaboración propia.

Como podemos visualizar en la **¡Error! No se encuentra el origen de l a referencia.**, las corrientes que afectan al Nodo Vb son $I1$, $I2$ e $I3$, y estas salen del nodo, lo cual nos dice que todas van a ser positivas.

$$-I1 + I2 + I3 = 0 \quad \text{(a)}$$

Debido a que se desconoce el valor de las corrientes, aplicamos la ley de Ohm para representarlas, siendo estas reemplazadas en la ecuación *(a)*.

$$I1 = \frac{Va - Vb}{R1 + R2} \qquad (b)$$



Figura 22. Componentes de la Corriente I1.

Fuente: Elaboración propia.

$$I2 = \frac{Vb - Vc}{R4} \qquad (c)$$

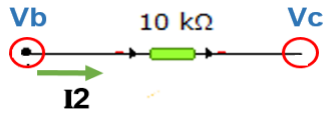


Figura 23. Componentes de la corriente I2.

Fuente: Elaboración propia.

$$I3 = \frac{Vb - Vref}{R3} \qquad (d)$$

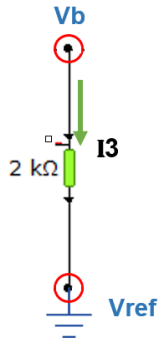


Figura 24. Componentes de la corriente I3.

Fuente: Elaboración propia.

Para una resolución más fácil se convierte las resistencias que están en kilo ohmios a Ohmios.

$1\,\Omega \;=\; 0.001\,K\Omega$

$$R1 = 3.5\cancel{k\Omega} * \frac{1\Omega}{0.001\cancel{k\Omega}} \qquad R3 = 2\cancel{k\Omega} * \frac{1\Omega}{0.001\cancel{k\Omega}}$$

$$R1 = \; 3500\,\Omega \qquad R3 = \; 2000\,\Omega$$

$$R1 = \; 3.5x10^3\Omega \qquad R3 = \; 2x10^3\Omega$$

$$R2 = 8\cancel{k\Omega} * \frac{1\Omega}{0.001\cancel{k\Omega}} \qquad R4 = 10\cancel{k\Omega} * \frac{1\Omega}{0.001\cancel{k\Omega}}$$

$$R2 = \; 8000\,\Omega \qquad R4 = \; 10000\,\Omega$$

$$R2 = \; 8x10^3\Omega \qquad R4 = \; 1x10^4\Omega$$

$$R5 = 6\cancel{k\Omega} * \frac{1\Omega}{0.001\cancel{k\Omega}}$$

$$R5 = \; 6000\,\Omega$$

$$R5 = \; 6x10^3\Omega$$

Las ecuaciones (b), (c), (d), las reemplazamos en la ecuación (a).

$$-\left(\frac{Va - Vb}{R1 + R2}\right) + \frac{Vb - Vc}{R4} + \frac{Vb - Vref}{R3} = 0$$

Realizamos ley de signos y reemplazamos las variables con sus valores y reducimos la ecuación.

$$\frac{-10 + Vb}{1.15x10^4} + \frac{Vb - Vc}{1\,x10^4} + \frac{Vb}{2\,x10^3} = 0$$

Realizamos el máximo común múltiplo (m.c.m) de los denominadores.

$$\frac{-200 + 20Vb + 23Vb - 23Vc + 115Vb}{2.3x10^5} = 0$$

$$\frac{158Vb - 23Vc - 200}{2.3x10^5} = 0$$

$$\frac{158Vb}{2.3x10^5} - \frac{23Vc}{2.3x10^5} - \frac{200}{2.3x10^5} = 0$$

$$6.86x10^{-4}Vb - 1x10^{-4}Vc = 8.69x10^{-4}$$

(*Ecuación 1*)

Nodo Vc

Analizamos las corrientes que pasan por el **Nodo *Vc*.**

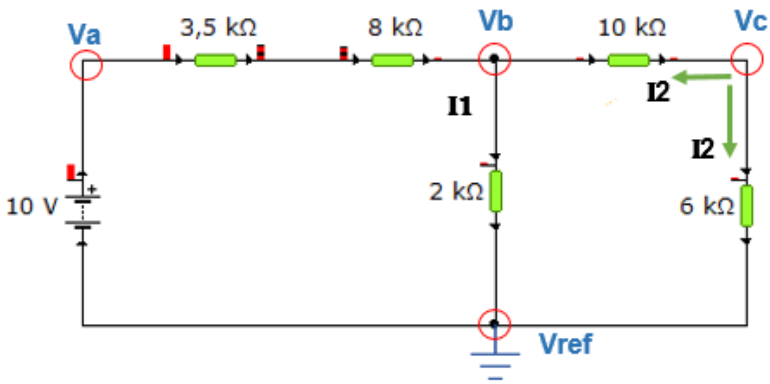


Figura 25. Corrientes que pasan por el Nodo Vc.

Fuente: Elaboración propia.

Realizamos las ecuaciones de la misma manera que en el **Nodo *Vb*,** pero en este caso la corriente que pasa por este nodo es la corriente $I2$, por lo tanto, plantearemos las ecuaciones en base a la misma.

$I2 + I2 = 0$ (e)

Utilizando la Ley de Ohm, encontramos el valor de la corriente, para luego reemplazar en la ecuación (e).

$$I2 = \frac{Vc - Vb}{R4} \qquad (f)$$

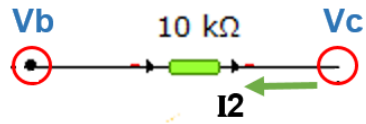


Figura 26. Componentes de la corriente I2 en la resistencia R4.

Fuente: Elaboración propia.

$$I2 = \frac{Vc - Vref}{R5} \qquad (g)$$

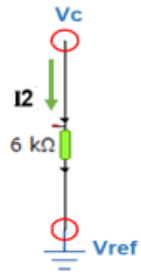


Figura 27. Componentes de la corriente I2 en la resistencia R5.

Fuente: Elaboración propia.

Reemplazamos las ecuaciones (f), (g) en la ecuación (e).

$$\frac{Vc - Vb}{R4} + \frac{Vc - Vref}{R5} = 0$$

Reemplazamos con los valores que tenemos y reducimos la ecuación.

$$\frac{Vc - Vb}{1x10^4} + \frac{Vc - 0}{6x10^3} = 0$$

Realizamos el m.c.m para una resolución más sencilla.

$$\frac{3Vc + 3Vb + 5Vc}{3x10^4} = 0$$

$$\frac{8Vc - 3Vb}{3x10^4} = 0$$

$$\frac{8Vc}{3x10^4} - \frac{3Vb}{3x10^4} = 0$$

$$2.667x10^{-4}Vc - 1x10^{-4}Vb$$

(*Ecuación 2*)

Paso 5: Resolvemos el sistema de ecuaciones

$6.86x10^{-4}Vb - 1x10^{-4}Vc = 8.69x10^{-4}$ (*Ecuación 1*)

$2.667x10^{-4}Vc - 1x10^{-4}Vb = 0$ (*Ecuación 2*)

A continuación, se aplicará el método de sustitución para encontrar los voltajes Vb y Vc, que posteriormente nos ayudaran a encontrar las corrientes y los voltajes en cada una de las resistencias del circuito analizado.

En la *(Ecuación 2)* despejaremos Vc en función de Vb, lo que proporcionará la *(Ecuación 3)*, como se mostrará a continuación.

$$\mathbf{2.667x10^{-4}Vc - 1x10^{-4}Vb = 0}$$

(*Ecuación 2*)

$$Vc = \frac{1x10^{-4}Vb}{2.667x10^{-4}}$$

(*Ecuación 3*)

Una vez despejado Vc, lo reemplazamos en la *(Ecuación 1)*, para encontrar el voltaje Vb:

$$\mathbf{6.86x10^{-4}Vb - 1x10^{-4}Vc = 8.69x10^{-4}}$$ (*Ecuación 1*)

$$Vc = 3.74953x10^{-1}Vb$$

$$6.86x10^{-4}Vb - 1x10^{-4}(3.74953x10^{-1}\ \text{Vb}) = 8.69x10^{-4}$$

$$6.86x10^{-4}Vb - 3.74953x10^{-5}Vb = 8.69x10^{-4}$$

$$6.485047x10^{-4}Vb = 8.69x10^{-4}$$

$$Vb = \frac{8.69x10^{-4}}{6.485047x10^{-4}} \qquad Vb = 1.340\ V$$

Ya obtenido en valor de Vb, podremos encontrar Vc, para lo cual, reemplazará el valor de Vb en la *(Ecuación 3).*

$Vc = 3.74953x10^{-1}Vb$ (*Ecuación 3*)

$Vc = 3.74953x10^{-1}(1.340)$ => $\qquad Vc = 0.502\ V$

Paso 6: En las ecuaciones (b), (c), (d), reemplazamos el valor de los voltajes y de las resistencias para obtener las corrientes I1, I2 e I3.

$$\boldsymbol{I1 = \frac{Va - Vb}{R1 + R2}} \quad (b)$$

$$I1 = \frac{10\,V - 1.340\,V}{1.15x10^{4}\,\Omega}$$

$$I1 = 753.14\,x10^{-6}\,A$$

$$I1 = 753.14\,uA$$

$$\boldsymbol{I2 = \frac{Vb - Vc}{R4}} \quad (c)$$

$$I2 = \frac{1.340\,V\ - 0.502\,V}{1x10^{4}\Omega}$$

$$I2 = 83.8x10^{-6}\,A$$

$$I2 = 83.8\,uA$$

$$\boldsymbol{I3 = \frac{Vb - Vref}{R3}} \quad (b)$$

$$I3 = \frac{1.340\,V\ - 0}{2x10^{3}\Omega}$$

$$I3 = 6{,}7x10^{-4}\,A$$

$$I3 = 670\,uA$$

Aplicando la ley de Ohm, encontramos el voltaje que pasa a través de cada resistencia.

$$V = IxR$$

Ecuación 5. Fórmula del voltaje.

$$\boldsymbol{VR1 = I1xR1}$$

$$VR1 = (753.14\,x10^{-6}A)(3.5x10^{3}\Omega)$$

$$VR1 = 2.636\,V$$
$$VR1 = 2.64\,V$$

$$\boldsymbol{VR2 = I1xR2}$$

$$VR2 = (753.14\ x10^{-6}A)(8x10^{3}\Omega)$$

$$VR2 = 6.02512\ V$$
$$VR2 = 6.03\ V$$

$$\boldsymbol{VR3 = I3xR3}$$

$$VR3 = (6{,}7x10^{-4}\ A)(2x10^{3}\Omega)$$

$$VR3 = 1.3389\ V$$
$$VR3 = 1.34\ V$$

$$\boldsymbol{VR4 = I2xR4}$$

$$VR4 = (83.8x10^{-6}\ A)(1x10^{4}\Omega)$$
$$VR4 = 838\ mV$$
$$VR4 = 0.838V$$

$$\boldsymbol{VR5 = I2xR5}$$

$$VR5 = (83.8x10^{-6}\ A)(6x10^{3}\Omega)$$

$$VR5 = 0.502\ V$$
$$VR5 = 502\ mV$$

Se comprobó el resultado en la herramienta Crocodile, en el cual se simuló el circuito, comparando los valores obtenidos con los valores del simulador.

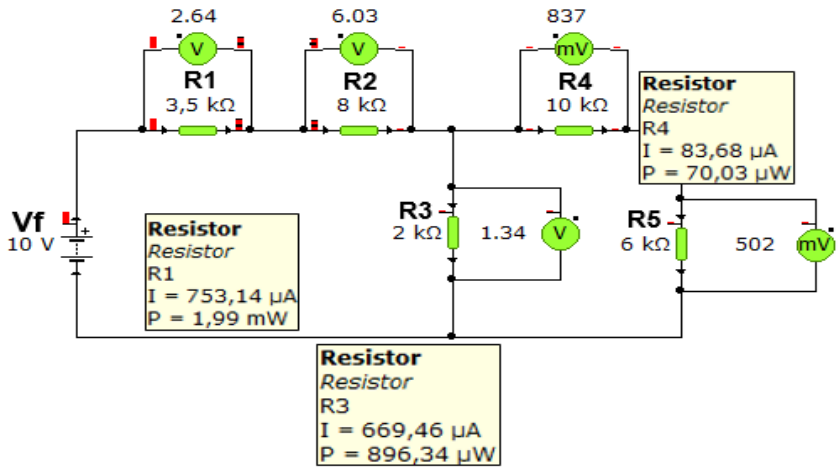


Figura 28. Comprobación en Crocodile.

Fuente: Elaboración propia.

En la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se puede a preciar que la mayoría de los valores obtenidos analíticamente coinciden con los valores en el simulador, lo que se debe a que trabajamos con una buena precisión en la notación científica.

Tabla 5. Comparación de los valores analíticos con los del simulador.

Descripción	**Valores obtenidos analíticamente**	**Valores obtenidos en el Crocodile**
I1	753.14 uA	753.14 uA
I2	83.8 uA	83.68 uA
I3	670 uA	669.46 uA
VR1	2.64 V	2.64 V
VR2	6.03 V	6.03 V
VR3	1.34 V	1.34 V

VR4	$838mV$	$837\ mV$
VR5	$502\ mV$	$502\ mV$

Sabías que…



La diferencia de potencial a la que está sometida una resistencia es igual al voltaje antes de la resistencia menos el voltaje después de la resistencia.

Preguntas de reflexión



¿En qué se basan las leyes de Kirchhoff?

¿Quién planteó el método de voltaje de nodo?

¿Por qué es necesario asignar un nodo de referencia?

3.4 Resolución de ejercicios

En este apartado se resolverá un circuito con tres mallas, utilizando los pasos descritos anteriormente, con variantes de resolución en el paso 4, donde se calculará el valor de las intensidades: $I1$, $I2$ e $I3$ y los voltajes de las resistencias: R1, R2, R4, R5, R6 y R7.

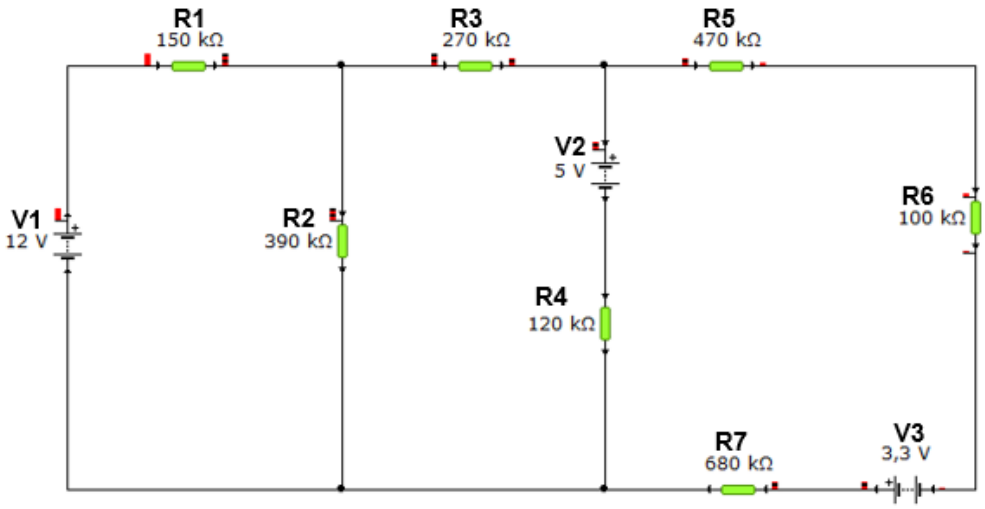


Figura 29. Circuito de tres mallas para aplicar voltaje de nodos.

Fuente: Elaboración propia.

Pasos 1, 2 y 3: Localizar los nodos, definir el nodo de referencia y asignar un nombre a los voltajes de cada nodo.

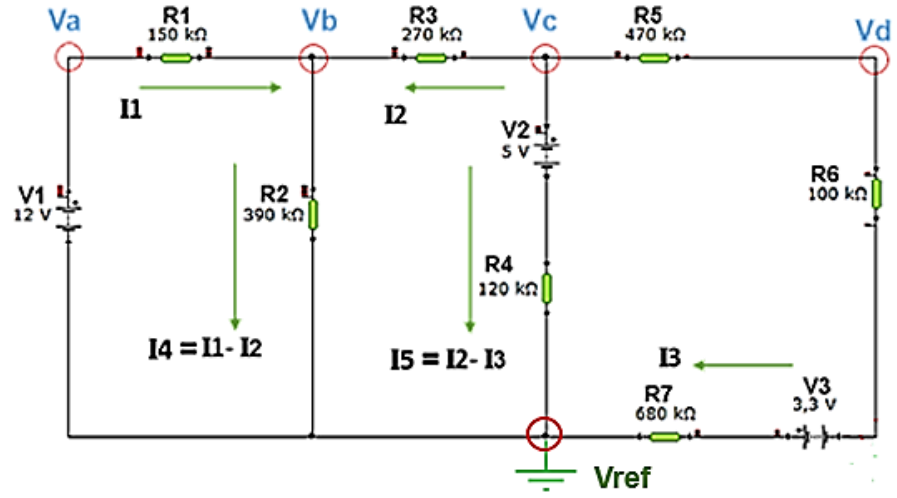


Figura 30. Asignar nodos y nodo de referencia en voltaje de nodos.

Fuente: Elaboración propia.

Paso 4: Plantear las ecuaciones de acuerdo con las leyes de Kirchhoff de corrientes de acuerdo a cada nodo.

Ecuaciones = # Nodos -1

Ecuaciones = 5 -1= 4 ecuaciones

Pero al observar el circuito se determina que un nodo (Va), tienen un valor ya definido, que es de 12 V con respecto al voltaje de referencia. Por lo tanto, el sistema se reduce a 3 ecuaciones.

Nodo Va

Se realiza el diferencial de voltaje en la fuente.

$$\boldsymbol{Va - Vref = 12V}$$

$$\boldsymbol{Va - 0 = 12V}$$

$$\boldsymbol{Va = 12V}$$

Nodo Vb

Analizamos las corrientes que pasan por el **Nodo Vb**.

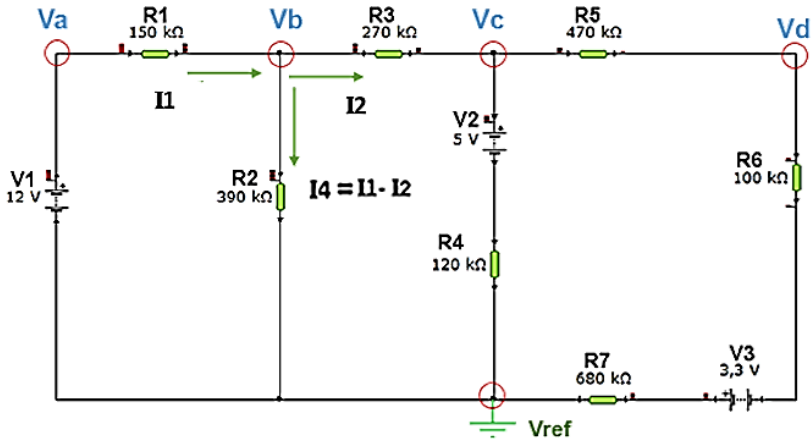


Figura 31. Corrientes del Nodo Vb en voltaje de nodo.

Fuente: Elaboración propia.

Planteamos la ecuación.

$$-I1 + I2 + I4 = 0 \text{ (a)}$$

Aplicamos la ley de Ohm para representar las corrientes.

$$\boldsymbol{I1 = \frac{Va - Vb}{R1}} \quad (b)$$

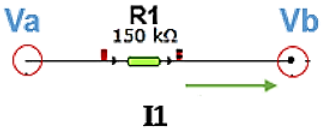


Figura 32. Componentes de la corriente I1 en voltaje de nodo.

Fuente: Elaboración propia.

$$\boldsymbol{I2 = \frac{Vb - Vc}{R3}} \quad (c)$$

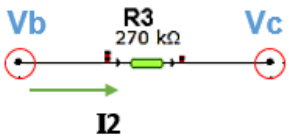


Figura 33. Componentes de la corriente I2 en voltaje de nodo.

Fuente: Elaboración propia.

$$I3 = \frac{Vb - Vref}{R2} \ (d)$$

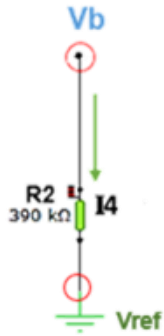


Figura 34. Componentes de la corriente I4 en voltaje de nodo.

Fuente: Elaboración propia.

Convertimos las resistencias que se encuentran el kiloohmios a Ohmios.

$R1 = 150\ K\Omega$ $R2 = 390\ K\Omega$ $R3 = 270\ K\Omega$

$R1 = 150000\ \Omega$ $R2 = 390000\ \Omega$ $R3 = 270000\ \Omega$

$R1 = 1.5\ x\ 10^5\ \Omega$ $R2 = 3.9\ x\ 10^5\ \Omega$ $R. = 2.7\ x\ 10^5\ \Omega$

$R4 = 120\ K\Omega$ $R5 = 470\ K\Omega$ $R6 = 100\ K\Omega$

$R4 = 120000\ \Omega$ $R2 = 470000\ \Omega$ $R6 = 100000\ \Omega$

$R4 = 1.2\ x\ 10^5\ \Omega$ $R2 = 4.7\ x\ 10^5\ \Omega$ $R6 = 1\ x\ 10^5\ \Omega$

$R7 = 680\ K\Omega$

$R7 = 680000\ \Omega$

$R7 = 6.8\ x\ 10^5\ \Omega$

Las ecuaciones (b), (c), (d), las reemplazamos en la ecuación (a).

$$-\left(\frac{Va - Vb}{R1}\right) + \frac{Vb - Vc}{R3} + \frac{Vb - Vref}{R2} = 0$$

$$\frac{-12+Vb}{1.5\,x10^5}+\frac{Vb-Vc}{2.7x10^5}+\frac{Vb-0}{3.9x10^5}=0$$

$$\frac{117\cancel{Vb}-1404+65\cancel{Vb}-65Vc+45\cancel{Vb}}{1.755\,x10^7}=0$$

$$\frac{227Vb-65Vc-1404}{1.755x10^7}=0$$

$$\frac{227Vb}{1.755x10^7}-\frac{65Vc}{1.755x10^7}-\frac{1404}{1.755x10^7}=0$$

$$1.293447x10^{-5}Vb-3.7037x10^{-6}Vc-8x10^{-5}=0$$

$$1.293447x10^{-5}Vb-3.7037x10^{-6}Vc=8x10^{-5}\text{ (Ecuación 1)}$$

Nodo Vc

Analizamos las corrientes que pasan por el **Nodo Vc.**

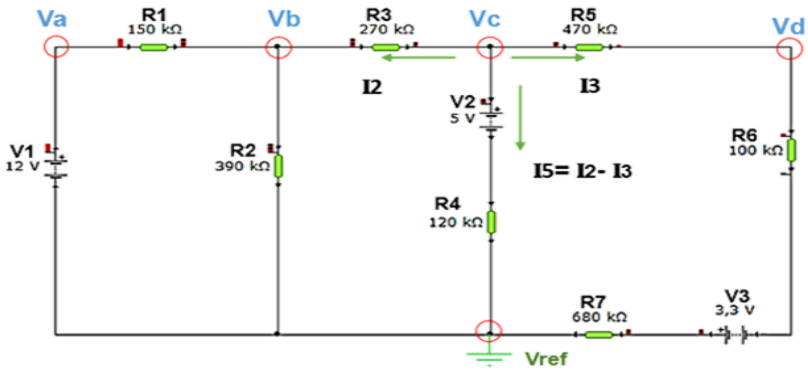


Figura 35. Corrientes del Nodo Vc.

Fuente: Elaboración propia.

Planteamos las ecuaciones:

$$\boldsymbol{I2 + I3 + I5 = 0} \ (e)$$

Aplicamos la ley de Ohm:

$$\boldsymbol{I2 = \frac{Vc - Vb}{R1}} \quad (f)$$

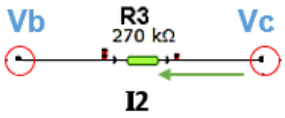


Figura 36. Componentes de la corriente I2 en nodo Vc.

Fuente: Elaboración propia.

$$\boldsymbol{I3 = \frac{Vc - Vd}{R5}} \quad (g)$$

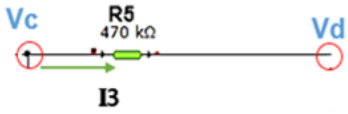


Figura 37.Componentes de la corriente I3 en nodo Vc.

Fuente: Elaboración propia.

$$\boldsymbol{I5 = \frac{Vc - 5}{R4}} \quad (h)$$

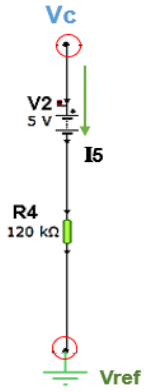


Figura 38. Componentes de la corriente I5 en nodo Vc.

Fuente: Elaboración propia.

Se reemplaza las ecuaciones (f), (g), (h) en la ecuación (e).

$$\frac{Vc - Vb}{R3} + \frac{Vc - Vd}{R5} + \frac{Vc - 5}{R4} = 0$$

$$\frac{Vc - Vb}{2.7x10^5} + \frac{Vc - Vd}{4.7\ x10^5} + \frac{Vc - 5}{1.2\ x10^5} = 0$$

$$\frac{188\cancel{Vc} - 188Vb + 108\cancel{Vc} - 108Vd + 423\cancel{Vc} - 2115}{5.076x10^7} = 0$$

$$\frac{719Vc - 188Vb - 108Vd - 2115}{5.076x10^7} = 0$$

$$\frac{719Vc}{5.076x10^7} - \frac{188Vb}{5.076x10^7} - \frac{108Vd}{5.076x10^7} - \frac{2115}{5.076x10^7} = 0$$

$$1.41647x10^{-5}Vc - 3.70370x10^{-6}Vb - 2.12765x10^{-6}Vd = 4.16667x10^{-5}$$

(Ecuación 2)

Nodo Vd

Analizamos las corrientes que pasan por el **Nodo Vd.**

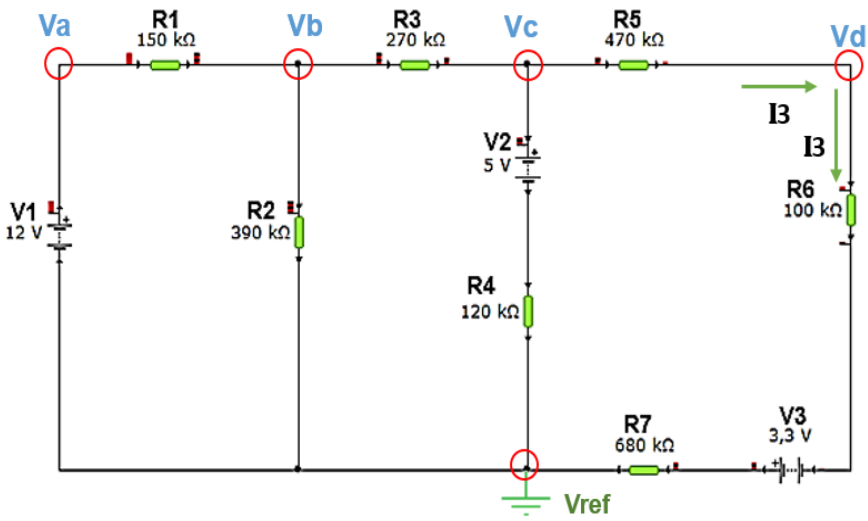


Figura 39. Corrientes del Nodo Vd en voltaje de nodo.

Fuente: Elaboración propia.

Planteamos las ecuaciones:

$$-I3 + I3 = 0 \text{ (i)}$$

Aplicamos la ley de Ohm:

$$I3 = \frac{Vc - Vd}{R5} \quad (j)$$

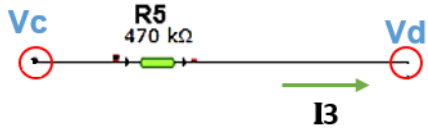


Figura 40. Componentes de la corriente I3 en la resistencia R5.

Fuente: Elaboración propia.

$$I3 = \frac{Vd + 3.3}{R6 + R7} \quad (k)$$

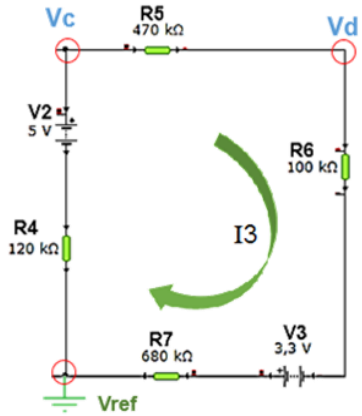


Figura 41. Componentes de la corriente I3 en la resistencia R6 y R7.

Fuente: Elaboración propia.

Se reemplaza las ecuaciones (j), (k), en la ecuación (i).

$$-\left(\frac{Vc-Vd}{R5}\right) + \frac{Vd+3.3}{R6+R7} = 0$$

$$\frac{-Vc + Vd}{4.7\,x10^5} + \frac{Vd + 3.3}{7.8\,x10^5} = 0$$

$$\frac{-78Vc + 78Vd + 47Vd + 155.1}{3.666\,x10^7} = 0$$

$$\frac{-78Vc + 125Vd + 155.1}{3.666x10^7} = 0$$

$$-\frac{78Vc}{3.666x10^7} + \frac{125Vd}{3.666x10^7} + \frac{155.1}{3.666x10^7} = 0$$

$$-2.12766x10^{-6}Vc + 3.40971x10^{-6}Vd + 4.23077x10^{-6} = 0$$

$$-2.12766x10^{-6}Vc + 3.40971x10^{-6}Vd = -4.23077x10^{-6}$$

(Ecuación 3)

Paso 5: Ordenamos y resolvemos el sistema de ecuaciones

$1.293447x10^{-5}Vb - 3.7037x10^{-6}Vc + OVd = 8x10^{-5}$ (Ecuación 1)

$-3.70370x10^{-6}Vb + 1.41647x10^{-5}Vc - 2.12765x10^{-6}Vd = 4.16667x10^{-5}$(Ecuación 2)

$0Vb - 2.12766x10^{-6}Vc + 3.40971x10^{-6}Vd = -4.23077x10^{-6}$ (Ecuación 3)

3.4.1 Resolución del circuito aplicando la regla de Cramer

Esta regla, se analizó detalladamente en el apartado Resolución de Ejercicios en este capítulo, específicamente en el punto 2.4.2 del libro, en este se explica su concepto y su aplicación.

Para aplicar la regla de Cramer, debemos de tomar en cuenta las condiciones que tiene esta regla, las cuales fueron explicadas con anterioridad.

A continuación, se aplicará el procedimiento, para resolver el circuito de la ***¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.***.

Se plantea la matriz de nodos, se tomará los coeficientes de cada una de las incógnitas del sistema:

$$[\boldsymbol{R}] = \begin{bmatrix} 1.293447x10^{-5} & -3.7037x10^{-6} & 0 \\ -3.70370x10^{-6} & 1.41647x10^{-5} & -2.12765x10^{-6} \\ 0 & -2.12766x10^{-6} & 3.40971x10^{-6} \end{bmatrix}$$

La matriz de voltajes, esta es conformada por los términos independientes que se encuentran después del igual en el sistema de ecuaciones, quedando de la siguiente forma:

$$[\boldsymbol{V}] = \begin{bmatrix} 8x10^{-5} \\ 4.16667x10^{-5} \\ -4.23077x10^{-6} \end{bmatrix}$$

Formamos las matrices [B], [C], [D].

$$[\boldsymbol{B}] = \begin{bmatrix} 8x10^{-5} & -3.7037x10^{-6} & 0 \\ 4.16667x10^{-5} & 1.41647x10^{-5} & -2.12765x10^{-6} \\ -4.23077x10^{-6} & -2.12766x10^{-6} & 3.40971x10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{C}] = \begin{bmatrix} 1.293447x10^{-5} & 8x10^{-5} & 0 \\ -3.70370x10^{-6} & 4.16667x10^{-5} & -2.12765x10^{-6} \\ 0 & -4.23077x10^{-6} & 3.40971x10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{D}] = \begin{bmatrix} 1.293447x10^{-5} & -3.7037x10^{-6} & 8x10^{-5} \\ -3.70370x10^{-6} & 1.41647x10^{-5} & 4.16667x10^{-5} \\ 0 & -2.12766x10^{-6} & -4.23077x10^{-6} \end{bmatrix}$$

Se calcula las determinantes de las matrices anteriormente indicadas, en este caso utilizaremos la regla se Sarrus.

$$|\boldsymbol{R}| = \begin{vmatrix} 1.293447x10^{-5} & -3.7037x10^{-6} & 0 \\ -3.70370x10^{-6} & 1.41647x10^{-5} & -2.12765x10^{-6} \\ 0 & -2.12766x10^{-6} & 3.40971x10^{-6} \\ 1.293447x10^{-5} & -3.7037x10^{-6} & 0 \\ -3.70370x10^{-6} & 1.41647x10^{-5} & -2.12765x10^{-6} \end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{R}| = [6.247x10^{-16} - 1.053x10^{-16}]$$

$$|\boldsymbol{R}| = 5.194x10^{-16}$$

$$|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 8x10^{-5} & -3.7037x10^{-6} & 0 \\ 4.16667x10^{-5} & 1.41647x10^{-5} & -2.12765x10^{-6} \\ -4.23077x10^{-6} & -2.12766x10^{-6} & 3.40971x10^{-6} \\ 8x10^{-5} & -3.7037x10^{-6} & 0 \\ 4.16667x10^{-5} & 1.41647x10^{-5} & -2.12765x10^{-6} \end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{B}| = [3.830x10^{-15} + 1.640x10^{-16}]$$

$$|\boldsymbol{B}| = 3.994\, x10^{-15}$$

$$|\boldsymbol{C}| = \begin{vmatrix} 1.293447x10^{-5} & 8x10^{-5} & 0 \\ -3.70370x10^{-6} & 4.16667x10^{-5} & -2.12765x10^{-6} \\ 0 & -4.23077x10^{-6} & 3.40971x10^{-6} \\ 1.293447x10^{-5} & 8x10^{-5} & 0 \\ -3.70370x10^{-6} & 4.16667x10^{-5} & -2.12765x10^{-6} \end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{C}| = [1.838x10^{-15} + 8.939x10^{-16}]$$

$$|\boldsymbol{C}| = 2.731x10^{-15}$$

$$|\boldsymbol{D}| = \begin{vmatrix} 1.293447x10^{-5} & -3.7037x10^{-6} & 8x10^{-5} \\ -3.70370x10^{-6} & 1.41647x10^{-5} & 4.16667x10^{-5} \\ 0 & -2.12766x10^{-6} & -4.23077x10^{-6} \\ 1.293447x10^{-5} & -3.7037x10^{-6} & 8x10^{-5} \\ -3.70370x10^{-6} & 1.41647x10^{-5} & 4.16667x10^{-5} \end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{D}| = [-1.447x10^{-16} + 1.205x10^{-15}]$$

$$|\boldsymbol{D}| = 1.060x10^{-15}$$

Ya obtenido el determínate de las matrices, se calcula los valores de las incógnitas Vb, Vc y Vd.

$$Vb = \frac{|\boldsymbol{B}|}{|\boldsymbol{R}|} \qquad Vc = \frac{|\boldsymbol{C}|}{|\boldsymbol{R}|}$$

$$Vb = \frac{3.994\ x10^{-15}}{5.194x10^{-16}} \qquad Vc = \frac{2.731x10^{-15}}{5.194x10^{-16}}$$

$$Vb = 7.6896\ V \qquad Vc = 5.2579\ V$$

$$Vd = \frac{|\boldsymbol{D}|}{|\boldsymbol{R}|}$$

$$Vd = \frac{1.060x10^{-15}}{5.194x10^{-16}}$$

$$Vd = 2.0408\ V$$

Se calcula las corrientes que pasan por el circuito a través de las fórmulas planteadas.

$\boldsymbol{I1} = \frac{\boldsymbol{Va-Vb}}{\boldsymbol{R1}}$(b) $\qquad \boldsymbol{I2} = \frac{\boldsymbol{Vb-Vc}}{\boldsymbol{R3}}$ (c)

$$I1 = \frac{12\ V - 7.6896V}{1.5x10^5\ \Omega} \qquad I2 = \frac{7.6896\ V - 5.2579\ V}{2.7x10^5\ \Omega}$$

$$I1 = 2.874x10^{-5}\ A \qquad I2 = 9.0063x10^{-6}\ A$$

$$I1 = 28.7\ uA \qquad I2 = 9.01\ uA$$

$\boldsymbol{I3} = \frac{\boldsymbol{Vc-Vd}}{\boldsymbol{R5}}$ (g)

$$I3 = \frac{5.2579\ V - 2.0408\ V}{4.7x10^5\Omega}$$

$$I3 = 6.845x10^{-6}\ A$$

$I3 = 6.85\ uA$

Para calcular I4 e I5, podemos utilizar las fórmulas que hemos planteado o las fórmulas descritas.

$\boldsymbol{I4 = \frac{Vb-Vref}{R2}}$ (d)

$I4 = \frac{7.6896\ V - 0\ V}{3.9x10^5\ \Omega}$

$I4 = 1.972x10^{-5}\ A$

$I4 = 19.7\ uA$

$\boldsymbol{I4 = I1 - I2}$

$I4 = 28.7\ uA - 9.01\ uA$

$I4 = 19.7\ uA$

$I4 = 19.7\ uA$

$\boldsymbol{I5 = \frac{Vc-5}{R4}}$ (h)

$I5 = \frac{5.2579\ V - 5\ V}{1.2\ x10^5 \Omega}$

$I5 = 2.16\ x10^{-6} A$

$I5 = 2.16\ uA$

$\boldsymbol{I5 = I2 - I3}$

$I5 = 9.01\ uA - 6.85\ uA$

$I5 = 2.16\ uA$

$I5 = 2.16\ uA$

Por último, encontramos los valores de los voltajes que pasan por cada una de las resistencias, utilizando la ley de Ohm.

$\boldsymbol{VR1 = I1xR1}$

$VR1 = 2.874x10^{-5}\ A\ x\ 1.5x10^5\ \Omega$

$VR1 = 4.31\ V$

$VR1 = 4.311\ V$

$$\boldsymbol{VR2 = I4xR2}$$

$$VR2 = 1.972x10^{-5}\ A\ x\ 3.9x10^{5}\ \Omega$$

$$VR2 = \ 7.691\ V$$

$$VR2 = \ 7.69\ V$$

$$\boldsymbol{VR3 = I2xR3}$$

$$VR3 = 9.0063x10^{-6}\ \ A\ x\ 2.7x10^{5}\ \Omega$$

$$VR3 = \ 2.432\ V$$

$$VR3 = \ 2.43\ V$$

$$\boldsymbol{VR4 = I5xR4}$$

$$VR4 = 2.16\ x10^{-6} A\ x\ 1.2\ x10^{5}\ \Omega$$

$$VR4 = \ 2.592x10^{-1}\ V$$

$$VR4 = \ 259{,}2\ mV$$

$$\boldsymbol{VR5 = I3xR5}$$

$$VR5 = 6.845x10^{-6}\ \ A\ x\ 4.7x10^{5}\ \Omega$$

$$VR5 = \ 3.217\ V$$

$$VR5 = \ 3.22\ V$$

$$\boldsymbol{VR6 = I3xR6}$$

$VR6 = \ 685\ mV$

$VR6 = 6.845x10^{-6}\ A\ x\ 1\ x10^{5}\ \Omega$

$VR6 = \ 0.6845\ V$

$\boldsymbol{VR7 = I3xR7}$

$VR7 = \ 6.845x10^{-6}\ A\ x\ 6.8x10^{5}\ \ \Omega$

$VR7 = 4.655\ V$
$VR7 = 4.66\ V$

3.4.2 Resolución del circuito aplicando el método de Gauss-Jordán

Este método, se analizó detalladamente en el apartado Resolución de Ejercicios en este capítulo, específicamente en el punto 2.4.3 del libro, en este se explica su concepto y su procedimiento.

Utilizamos la misma nomenclatura y coeficientes indicados anteriormente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} R_{11} & R_{12} & R_{13} & V_1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & V_2 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & V_3 \end{array}\right)$$

Lo primero que debemos realizar es armar la matriz, teniendo esta como elementos los valores del sistema de ecuación, en la cual solo se cogerá las variables numéricas, como se mostrará a continuación:

$$\begin{array}{c} \\ \textbf{F1} \\ \textbf{F2} \\ \textbf{F3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \textbf{C1} & \textbf{C2} & \textbf{C3} & \textbf{C4} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1.293447x10^{-5} & -3.7037x10^{-6} & 0 & 8x10^{-5} \\ -3.70370x10^{-6} & 1.41647x10^{-5} & -2.12765x10^{-6} & 4.16667x10^{-5} \\ 0 & -2.12766x10^{-6} & 3.40971x10^{-6} & -4.23077x10^{-6} \end{array}\right) \end{array}$$

En la matriz anterior podemos observar que cada fila y columna tiene su nomenclatura, utilizándola para que la resolución sea de fácil explicación y entendimiento.

A continuación, se realizará la reducción de la matriz a través del método ya mencionado, dándonos como resultado Vb, Vc y Vd.

Para obtener la unidad en R_{11}, se dividirá F1 para el coeficiente R_{11}.

Realizamos la siguiente operación para obtener ceros en el coeficiente R_{21}.

$$\frac{F1}{1.293447x10^{-5}} => \left(\begin{array}{ccc|c} 1.293447x10^{-5} & -3.7037x10^{-6} & 0 & 8x10^{-5} \\ -3.70370x10^{-6} & 1.41647x10^{-5} & -2.12765x10^{-6} & 4.16667x10^{-5} \\ 0 & -2.12766x10^{-6} & 3.40971x10^{-6} & -4.23077x10^{-6} \end{array}\right)$$

Dividimos F2 para R22, para obtener unos.

$$F2 + 3.70370x10^{-6}F1 => \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2.86343x10^{-1} & 0 & 6.185023 \\ -3.70370x10^{-6} & 1.41647x10^{-5} & -2.12765x10^{-6} & 4.16667x10^{-5} \\ 0 & -2.12766x10^{-6} & 3.40971x10^{-6} & -4.23077x10^{-6} \end{array}\right)$$

$$\frac{F2}{1.31042x10^{-5}} => \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2.86343x10^{-1} & 0 & 6.185023 \\ 0 & 1.31042x10^{-5} & -2.12765x10^{-6} & 6.457417x10^{-5} \\ 0 & -2.12766x10^{-6} & 3.40971x10^{-6} & -4.23077x10^{-6} \end{array}\right)$$

Obtenemos los ceros en F1 y F3, realizamos lo siguiente:

$$\begin{array}{l} F1 + 2.86343x10^{-1}F2 => \\ F3 + 2.12766x10^{-6}F2 => \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2.86343x10^{-1} & 0 & 6.185023 \\ 0 & 1 & -1.62364x10^{-1} & 4.927746 \\ 0 & -2.12766x10^{-6} & 3.40971x10^{-6} & -4.23077x10^{-6} \end{array}\right)$$

Dividimos F3 para el coeficiente $R_{33,}$ para obtener la unidad.

Obtenemos los ceros de F1 y F2:

$$\frac{\boldsymbol{F3}}{3.06425x10^{-6}} => \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4.6492x10^{-2} & 7.596049 \\ 0 & 1 & -1.62364x10^{-1} & 4.927746 \\ 0 & 0 & 3.06425x10^{-6} & 6.253798x10^{-6} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \boldsymbol{F1} + 4.6492x10^{-2}\boldsymbol{F3} => \\ \boldsymbol{F2} + 1.62364x10^{-1}\boldsymbol{F3} => \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4.6492x10^{-2} & 7.596049 \\ 0 & 1 & -1.62364x10^{-1} & 4.927746 \\ 0 & 0 & 1 & 2.040890 \end{array}\right)$$

Se puede observar que, con este método, se obtiene directamente los valores de las incógnitas del sistema de ecuaciones Vb, Vc y Vd.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7.690934 \\ 0 & 1 & 0 & 5.259113 \\ 0 & 0 & 1 & 2.040890 \end{array}\right)$$

$Vb = 7.6909\,V$ $Vc = 5.2591\,V$ $Vd = 2.0409\,V$

Calculamos las corrientes I1, I2, I3, I4 e I5, para ellos utilizamos las ecuaciones (b), (c), (d), (g), (h).

$\boldsymbol{I1} = \frac{\boldsymbol{Va-Vb}}{\boldsymbol{R1}}$(b) $\boldsymbol{I2} = \frac{\boldsymbol{Vb-Vc}}{\boldsymbol{R3}}$ (c)

$I1 = \frac{12\,V - 7.6909\,V}{1.5\,x10^5\,\Omega}$ $I2 = \frac{7.6909\,V - 5.2591\,V}{2{,}7x10^5\ \Omega}$

$I1 = 2.873x10^{-5}\,A$ $I2 = 9.0067\,x10^{-6}\,A$

$I1 = 28.7\ uA$ $I2 = 9.01\ uA$

$\boldsymbol{I3 = \frac{Vc-Vd}{R5}}$ (g) $\boldsymbol{I4 = \frac{Vb-Vref}{R2}}$ (d)

$I3 = \frac{5.2591\ V - 2.0409\ V}{4.7x10^5\ \Omega}$ $I4 = \frac{7.6909\ V - 0\ V}{3.9x10^5\ \Omega}$

$I3 = 6.847x10^{-6}\ A$ $I4 = 19.72\ x10^{-6} A$

$I3 = 6.85\ uA$ $I4 = 19.7\ uA$

$\boldsymbol{I5 = \frac{Vc-5}{R4}}$ (h)

$I5 = \frac{5.2591\ V - 5\ V}{1.2x10^5\ \Omega}$

$I5 = 2.159x10^{-6}\ A$

$I5 = 2.16\ uA$

Aplicamos la ley de Ohm para encontrar el voltaje que pasa a través de cada resistencia.

$\boldsymbol{VR1 = I1xR1}$

$VR1 = 2.873x10^{-5}\ A\ x\ 1.5\ x10^5 \Omega$

$VR1 = 4.309\ V$

$VR1 = 4.31\ V$

$$\boldsymbol{VR2 = I4xR2}$$

$$VR2 = 19.72\ x10^{-6}\ A\ x\ 3.9x10^{5}\ \Omega$$

$$VR2 = \ 7.690\ V$$
$$VR2 = \ 7.69\ V$$

$$\boldsymbol{VR3 = I2xR3}$$

$$VR3 = \ 9.0067\ x10^{-6}\ A\ x\ 2{,}7x10^{5}\ \Omega$$

$$VR3 = \ 2.431\ V$$

$$VR3 = \ 2.43\ V$$

$$\boldsymbol{VR4 = I5xR4}$$

$$VR4 = 2.159x10^{-6}\ A\ x\ 1.2x10^{5}\ \Omega$$

$$VR4 = \ 0.2591\ V$$
$$VR4 = \ 259{,}1\ mV$$

$$\boldsymbol{VR5 = I3xR5}$$

$$VR5 = 6.847x10^{-6}\ A\ x\ 4.7x10^{5}\ \Omega$$

$$VR5 = \ 3.218\ V$$

$$VR5 = \ 3.22\ V$$

$$\boldsymbol{VR6 = I3xR6}$$

$VR6 = 6.847x10^{-6}\ A\ x\ 1x10^{5}\ \Omega$

$VR6 = \ 0.685\ V$

$VR6 = \ \ 685\ mV$

$\boldsymbol{VR7 = I3xR7}$

$VR7 = \ 6.847x10^{-6}\ A\ x\ 6.8x10^{5}\ \Omega$

$VR7 = 4.655\ V$
$VR7 = 4.66\ V$

Comprobación en el simulador Crocodile

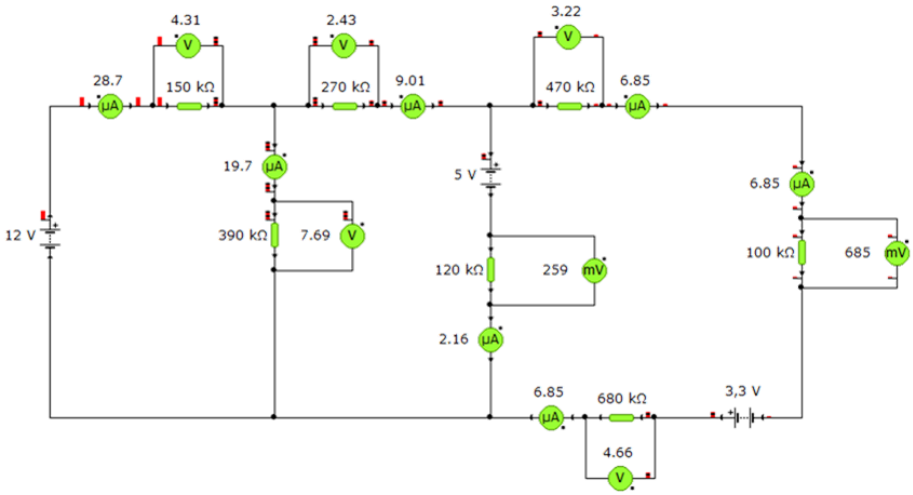


Figura 42. Comprobación en el simulador Crocodile.

Fuente: Elaboración propia.

En la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se puede a preciar que la mayoría de los valores obtenidos por los diferentes métodos aplicados coinciden, indicando un alto grado de precisión y certeza para resolver un problema de voltaje de nodo.

Tabla 6. Comparación de los valores obtenidos con Crocodile con el método voltaje de nodo.

Descripción	**Valores obtenidos analíticamente (Cramer)**	**Valores obtenidos analíticamente (Gauss-jordan)**	**Valores obtenidos en el Crocodile**
I1	28.7 uA	28.7 uA	28.7 uA
I2	9.01 uA	9.01 uA	9.01 uA
I3	6.85 uA	6.85 uA	6.85 uA
I4	19.7 uA	19.7 uA	19.7 uA
I5	2.16 uA	2.16 uA	2.16 uA
VR1	4.31 V	4.31 V	4.31 V
VR2	7.69 V	7.69 V	7.69 V
VR3	2.43 V	2.43 V	2.43 V
VR4	259,2 mV	259,1 mV	259mV
VR5	3.22 V	3.22 V	3.22 V
VR6	685 mV	685 mV	685 mV
VR7	4.66 V	4.66 V	4.66 V

Sabías que…

método de Gauss-Jordan



Este método debe su nombre a Carl Friedrich Gauss y a Wilhelm Jordan, es un sistema que nos permite resolver hasta 20 ecuaciones simultáneas, tratándose este de una serie de algoritmos del algebra lineal que nos ayudarán a encontrar las incógnitas de un sistema de ecuaciones a través de la reducción del mismo.

Preguntas de reflexión



¿Por qué es necesario definir el sentido de la corriente que pasa por cada nodo?

¿Cuál de los dos métodos visto es más práctico de utilizar?

CAPÍTULO IV

4 SUPER NODOS Y SUPER MALLAS

4.1 Objetivos

- Comprender en qué situaciones es necesario utilizar un supernodo o una supermalla durante el análisis de un circuito eléctrico.
- Aplicar las leyes de Kirchhoff para plantear las ecuaciones correspondientes a circuitos que contienen fuentes de voltaje o de corriente entre nodos y mallas.
- Resolver ejercicios de diferente configuración, identificando las incógnitas y seleccionando el procedimiento que permita desarrollar el análisis de manera ordenada.

4.2 Introducción

Al analizar un circuito eléctrico no siempre es posible aplicar directamente el procedimiento convencional de nodos o de mallas. La presencia de determinadas fuentes puede modificar la forma en que deben plantearse las ecuaciones y obliga a realizar algunas consideraciones adicionales. En estos casos aparecen dos recursos de análisis conocidos como supernodo y supermalla.

El supernodo se utiliza cuando una fuente de voltaje se encuentra conectada entre dos nodos que poseen voltajes desconocidos. En lugar de aplicar por separado la Ley de Corrientes de Kirchhoff a cada uno de ellos, ambos nodos se consideran conjuntamente para formular una ecuación. Después se incorpora una relación adicional determinada por el valor y la polaridad de la fuente de voltaje. De esta forma es posible

obtener las ecuaciones necesarias sin perder la relación existente entre los dos nodos.

La supermalla se presenta en una situación diferente. Cuando una fuente de corriente se encuentra en la rama compartida por dos mallas, no resulta conveniente escribir directamente una ecuación de voltajes para cada una de ellas. En su lugar, se establece un recorrido que rodea ambas mallas sin atravesar la rama donde se encuentra la fuente. Sobre este recorrido se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff y posteriormente se añade una ecuación que relaciona las corrientes de las dos mallas con el valor de la fuente.

Por lo tanto, el uso de un supernodo o de una supermalla no constituye un método completamente distinto al análisis nodal o al análisis de mallas. Se trata, más bien, de una adaptación que permite aplicar las leyes de Kirchhoff cuando la configuración del circuito presenta una condición particular.

El capítulo inicia con la identificación de las condiciones que determinan cuándo debe emplearse un supernodo o una supermalla. A partir de varios circuitos se mostrará cómo plantear las ecuaciones correspondientes, cómo asignar los signos y de qué manera interpretar los valores obtenidos. Después de los ejemplos desarrollados se incluirán ejercicios para que el lector practique ambos procedimientos y reconozca en qué casos corresponde aplicar cada uno.

4.3 Conceptos Básicos

4.3.1 Definición

Super Nodos

Un super nodo es una técnica utilizada en el análisis de circuitos eléctricos mediante el método de voltajes de nodo, que se aplica cuando dos nodos están conectados directamente por una fuente de voltaje independiente. Dado que el voltaje entre esos dos nodos ya está definido por la fuente, no se puede aplicar la Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK) directamente a cada uno por separado. En su lugar, se agrupan ambos nodos y la fuente de voltaje como una sola entidad, llamada super nodo.

Al considerar los dos nodos como un solo conjunto, la LCK se plantea tomando en cuenta únicamente las corrientes que comunican el supernodo con el resto del circuito. Además, el valor de la fuente proporciona la relación existente entre los voltajes de ambos nodos, con lo cual se completan las ecuaciones necesarias para determinar las incógnitas.

4.3.2 Metodología

Como primer paso se localizan los diferentes nodos del circuito. Uno de ellos se toma como referencia y se considera con un potencial de cero voltios; a partir de este se establecen los voltajes desconocidos correspondientes a los demás nodos. A los nodos restantes se les asignan los voltajes que posteriormente deberán calcularse.

En condiciones normales, las ecuaciones se plantean aplicando la Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK), considerando que la suma algebraica

de las corrientes asociadas a un nodo es igual a cero. Sin embargo, el procedimiento requiere una consideración adicional cuando existe una fuente de voltaje conectada directamente entre dos nodos cuyos voltajes son desconocidos.

En esta situación no se conoce de manera directa la corriente que atraviesa la fuente de voltaje, por lo que no resulta conveniente analizar cada nodo de forma independiente. Para continuar con el procedimiento, los dos nodos y la fuente ubicada entre ellos se consideran como un solo conjunto denominado supernodo.

Una vez identificado el supernodo, la LCK se aplica tomando en cuenta las corrientes que entran o salen de todo el conjunto. A esta ecuación se añade otra relación determinada por el valor y la polaridad de la fuente de voltaje existente entre los dos nodos.

Estructura del Análisis con Super Nodo

Para resolver un circuito en el que aparece un supernodo es necesario plantear dos relaciones: una correspondiente a las corrientes que intervienen en el conjunto y otra asociada a la fuente de voltaje que conecta los nodos.

4.3.3 Ecuación de corriente del super nodo

En primer lugar, se aplica la Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK) alrededor del supernodo. Para hacerlo, se consideran las corrientes que atraviesan las ramas conectadas con el exterior del conjunto, ya sea que entren o salgan de él.

$$\Sigma\, I\, entrada = \Sigma\, I\, salida$$

Ecuación 6. LCK.

Reorganizado para nodos:

$$\Sigma\, I = 0$$

Ecuación 7. Reorganizado para nodos.

Estas corrientes se expresan en función de los voltajes nodales, por lo general usando la ley de Ohm:

$$I = \frac{Vi - Vj}{R}$$

Ecuación 8. Ley de Ohm.

4.3.4 Ecuación de voltaje impuesta por la fuente

Se agrega una ecuación adicional que representa la diferencia de potencial entre los nodos agrupados por la fuente de voltaje.

Si una fuente de voltaje Vs conecta los nodos Va y Vb, se escribe:

$$Va - Vb = Vs$$

Ecuación 9. Diferencia potencial.

También, dependiendo de la polaridad:

$$Vb - Va = Vs$$

Ecuación 10. Dependiendo la polaridad.

Un super nodo es una técnica empleada en el análisis de circuitos mediante el método de voltajes de nodo, que se aplica cuando una fuente de voltaje independiente conecta directamente dos nodos. En este caso, ambos nodos y la fuente se agrupan como una sola entidad para aplicar la Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK) al conjunto. Esta técnica es válida únicamente cuando no existen componentes resistivos entre los nodos conectados, ya que el voltaje entre ellos está definido exclusivamente por la fuente, eliminando la necesidad de aplicar la LCK individualmente a cada nodo.

Además, el uso del super nodo no es aplicable con fuentes de corriente, siendo exclusivo para fuentes de voltaje independientes. Las ecuaciones resultantes del análisis del super nodo, incluyendo la que expresa la diferencia de potencial impuesta por la fuente, se integran al sistema general del circuito para resolver los voltajes nodales de forma eficiente y ordenada.

4.4 Resolución de ejercicios

4.4.1 Resolución de circuito de Super Nodos

Para el V1 entra la corriente de 4ª y la de 9ª, para la ecuación de Super nodo entra las siguientes corrientes junto a la corriente que sale de V1 entra a V2.

$$V1 - V2 = 5\ V$$

(Ecuación 1)

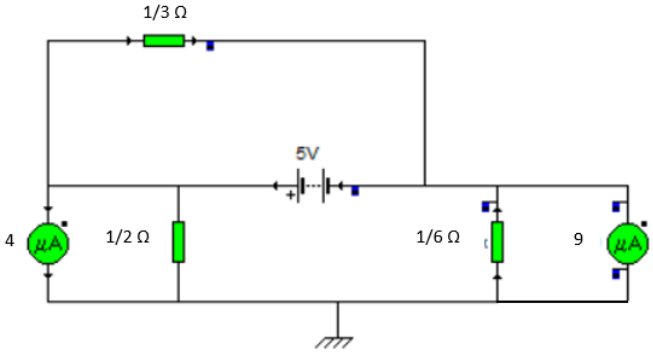


Figura 43. Circuito de Super Nodo.

Fuente: Elaboración propia.

Salen la I1, la I2 y la I3 quedando de la siguiente manera:

$$4 + 9 + I1 = I1 + I2 + I3$$

Luego simplificamos, eliminando así I1:

$$4 + 9 + I1 = I1 + I2 + I3$$

Como siguiente paso encontramos I2 e I3:

Encontrar I2

$$I2 = \frac{V1}{\frac{1}{2}} = 2V1$$

Encontrar I3

$$I3 = \frac{V2}{\frac{1}{6}} = 6V2$$

Luego podemos reemplazar los valores en la ecuación de super nodo

$$2V1 + 6V2 = 13$$

(ecuación 2)

Ahora tenemos un sistema de 2 x 2

Teniendo en cuenta la ecuación que es 1 * 6 + 2, quedaría de la siguiente manera:

$$6V1 - 6V2 = 30$$

$$2V1 + 6V2 = 13$$

$$8V1 = 43$$

El resultado es el siguiente

V1 = 5,375V

V2 = 5,375 – 5

V2 = 0,375V = 375 mV

4.5 Conceptos Básicos

4.5.1 Definición

Super Mallas

Una super malla es una técnica utilizada en el análisis de circuitos eléctricos mediante el método de corrientes de malla, que se aplica cuando una fuente de corriente independiente se encuentra entre dos

mallas adyacentes. Para realizar el análisis se considera un recorrido exterior que comprende las dos mallas, dejando fuera la rama donde se encuentra la fuente de corriente. Sobre este nuevo recorrido se plantea la ecuación correspondiente mediante la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK). Posteriormente, el valor de la fuente se utiliza para establecer la relación entre las corrientes asignadas a las dos mallas.

4.5.2 Metodología

El método de mallas permite determinar las corrientes de un circuito a partir de la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK). Para cada malla se establece un recorrido cerrado y se plantea una ecuación considerando las elevaciones y caídas de voltaje presentes en dicho trayecto.

Cuando una fuente de corriente se encuentra en una rama común a dos mallas, el procedimiento requiere una modificación. En este caso, no resulta conveniente escribir de forma independiente la ecuación de voltajes para cada malla, debido a que el voltaje existente en la fuente de corriente no se conoce directamente.

Para continuar con el análisis se forma una supermalla, considerando un recorrido que rodea las dos mallas involucradas sin atravesar la rama donde se encuentra la fuente de corriente. Sobre este nuevo recorrido se aplica la LVK tomando en cuenta las resistencias y fuentes de voltaje presentes.

La super malla facilita la aplicación de la LVK al conjunto completo, y luego se complementa el sistema con una ecuación adicional que

relaciona las corrientes de las dos mallas afectadas por la fuente de corriente.

4.5.3 Estructura del Análisis con Super Malla

Cuando se identifica una super malla, se deben aplicar dos tipos de ecuaciones clave:

Ecuación de voltajes de la super malla

Se aplica la LVK a toda la trayectoria cerrada que rodea a la fuente de corriente sin incluirla directamente. Se suman las caídas de tensión de todas las resistencias y elementos alrededor de ambas mallas, ignorando momentáneamente la fuente de corriente.

$$\Sigma V = 0$$

Ecuación 11. Ecuación LVK.

En general, la forma de la ecuación es:

$$R1(I1) + R2(I1 - I2) + \cdots = 0$$

Ecuación 12. Ecuación para voltajes super malla.

Donde I1 e I2 son las corrientes de malla involucradas.

Ecuación adicional por la fuente de corriente

Dado que se conoce el valor de la fuente de corriente, se introduce una ecuación adicional que relaciona directamente las corrientes de las dos mallas adyacentes.

Si la fuente de corriente Is fluye desde la malla 1 hacia la malla 2, se escribe:

$$I1 - I2 = Is$$

Ecuación 13. Ecuación que fluye de malla 1 a la 2.

Dependiendo de la dirección, puede ser:

$$I2 - I1 = Is$$

Ecuación 14. Ecuación dependiendo la dirección.

La super malla se utiliza cuando una fuente de corriente independiente se encuentra entre dos mallas contiguas y no tiene resistencias en serie. Como la corriente ya está definida por la fuente, no es posible aplicar directamente la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) a cada malla por separado. En su lugar, se ignora temporalmente la fuente de corriente, se traza una super malla que la rodea, y se aplica la LVK al conjunto completo, añadiendo una ecuación que relacione las corrientes de ambas mallas. Esta técnica requiere atención a la dirección de la corriente y claridad en la asignación de las corrientes de lazo.

4.6 Resolución de ejercicios

Resolución de circuito de super Mallas

Primero ubicamos las poralidades en cada una de las mallas dentro del circuito

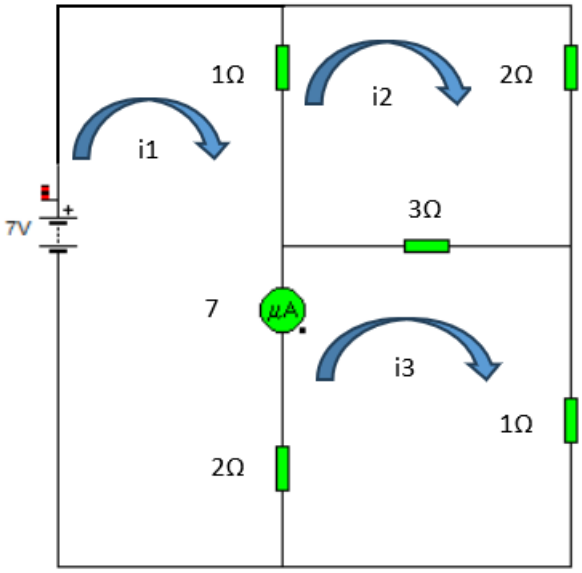


Figura 44. Circuito de super mallas.

Fuente: Elaboración propia.

El objetivo es eliminar el cableado donde se encuentra la fuente de corriente

Observamos que a partir de la fuente de corriente viaja una corriente a favor y otra que viaja en contra. Realizamos el siguiente análisis:

$$i1 - i3 = 7$$

(Ecuación 1)

Ahora observamos que nuestro sentido de corriente tomaría sentido de la siguiente manera, que es básicamente la unión de la malla 1 y la malla 3 realizando ahora la ecuación de la super malla.

No olvidarnos de la siguiente formula: $V = R \, . I$

Analizando el circuito podemos obtener:

$$-7 + i1 - (1 + 3)\, i2 + (3 + 1)\, i3 = 0$$

La ecuación de la super malla quedaría de la siguiente manera:

$$I1 - 4\, i2 + 4\, i3 = 7$$

(Ecuación 2)

Ahora analizaremos la Ecuación de la Malla 2 donde obtendremos la siguiente ecuación.

$$(2 + 3 + 1)\, i2 - i1 - 3i3 = 0$$

De esta ecuación tendríamos lo siguiente:

$$-i1 + 6i2 - 3i3 = 0$$

(Ecuación 3)

Ahora al tener las 3 ecuaciones vamos a resolver las incógnitas:

$I1 = 7 + i3$ quedando como la ecuación 4

En la Ecuación 2 realizamos lo siguiente:

$$7 + i3 - 4i2 + 4i3 = 7$$

Al pasar el 7 al otro lado se borran quedando:

$-4i2 + i3 = 0$ viniendo a ser la ecuación numero 5

Luego realizamos lo siguiente que es resolver las ecuaciones:

$$-7 - i3 + 6i2 - 3i3 = 0$$

$$6i2 - 4i3 = 7$$

Viniendo a ser la ecuación numero 6

Usaremos el sistema de 2 x 2 quedando de la siguiente manera:

I1=9A

I2 = 2.5 A

I3= 2 A

Ejemplo de la vida cotidiana:

Análisis de Mallas y Nodos en el Sistema de Iluminación de un Automóvil:

El sistema eléctrico de un vehículo moderno es un circuito mixto, pero lo simplificaremos en el sistema de iluminación, que usa la carrocería metálica como el punto de referencia común (tierra o *ground*).

1. Aplicación de LCK

El Nodo Principal: Es el borne positivo de la batería o el punto de distribución principal bajo el capó (fusilera). Las Corrientes de Salida: Desde este nodo principal, la energía se divide para alimentar sistemas independientes: los faros delanteros (I_{Faros}) las luces traseras (I_{Stop}), la iluminación interior (I_{Cabina}), la radio (I_{Radio}), etc.

$$I_{Faros} = I_{Faros} + I_{Stop}I_{Cabina}I_{Radio} + \cdots$$

La LCK nos dice que la energía total que sale de la batería es la suma exacta de toda la energía que está siendo consumida por cada luz, motorcito o accesorio en el coche. Si se añade un nuevo accesorio (como un cargador USB), la corriente total de la batería debe aumentar para cumplir con este principio.

2. Aplicación de LVK

Cada sistema (faros, luces traseras, etc.) es una malla individual conectada a la misma fuente.

- Malla del Faro Delantero: Se forma desde el borne positivo de la batería, pasa por el interruptor, llega al foco del faro (resistencia), y regresa a la batería a través de la conexión a tierra.
- El Equilibrio: Si la batería es de 12V, la LVK dicta que toda esa energía debe caerse a través del faro y el cableado (la resistencia interna).

$$V_{Bateria} - V_{Faro} - V_{Cable} = 0$$

Cuando un faro se funde, la resistencia del foco se vuelve infinita y la corriente en esa malla cae a cero. Aunque el resto del sistema siga funcionando (LCK), la LVK para esa malla específica se cumple al dejar de haber caídas de voltaje. Si el faro se funde, se pierde una de las mallas (un camino cerrado), pero el nodo de la batería sigue distribuyendo energía a las otras mallas.

Sabías que…



Análisis del circuito de métodos de nodos y mallas

El análisis de circuitos eléctricos con métodos como super nodos y super mallas tiene su base en los sistemas de ecuaciones lineales, cuya historia se remonta a civilizaciones antiguas como la babilónica, que ya resolvía problemas con múltiples incógnitas desde el 1700 a. C. Hoy en día, estas técnicas permiten simplificar circuitos complejos usando principios matemáticos que tienen miles de años de antigüedad.

Preguntas de reflexión



¿Es necesario verificar el análisis de super nodos y super mallas utilizando un simulador de circuitos eléctricos?

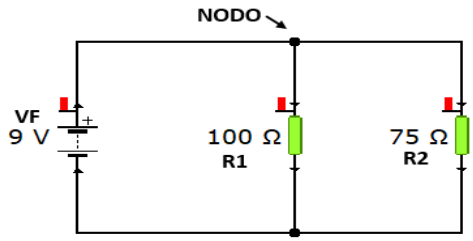
¿Por qué es tan importante plantear correctamente las ecuaciones en el análisis de circuitos con super nodos o super mallas?

EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

Cap.2

Ejercicios propuestos

1) En el siguiente circuito calcule la intensidad que entra en el nodo y elija la respuesta correcta.



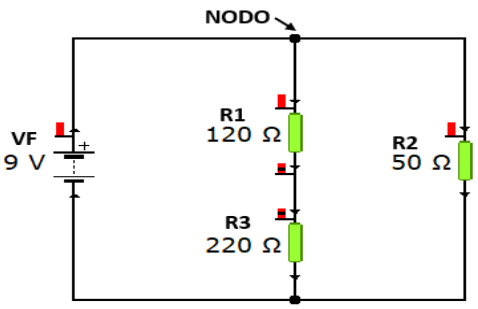
a) 20.9 mA

b) 209.56mA

c) 19.85 mA

d) 264.86 mA

2) En el siguiente circuito calcule la intensidad que entra en el nodo y elija la respuesta correcta.



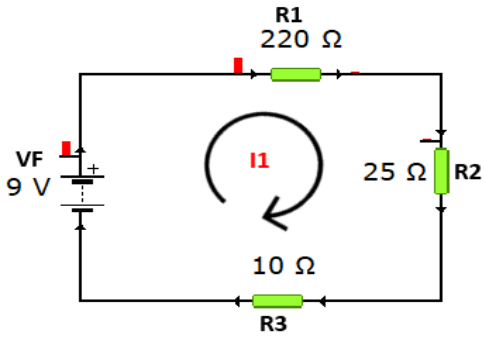
a) 109.65 mA

b) 85.128 mA

c) 369.2 mA

d) 206.04 mA

3) En el siguiente circuito calcule la intensidad de todo el circuito y elija la respuesta correcta.



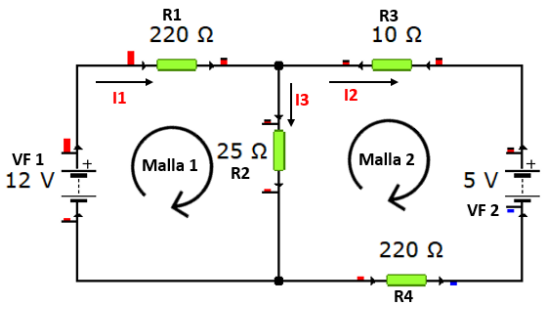
a) 35.28 mA

b) 24.15 mA

c) 85.23 mA

d) 35.45 mA

4) En el siguiente circuito, ¿qué valores corresponden a I1, I2 e I3?



a) **I1=** 58.5 mA, **I2=** 37.8 mA, **I3=** 9 mA.

b) **I1=** 37.6 mA, **I2=** 74.7 mA, **I3=** 11.2 mA.

c) **I1=** 47.43 mA, **I2=** 14.95 mA, **I3=** 62.38 mA.

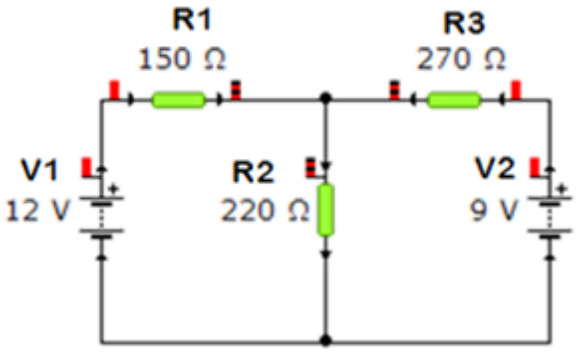
d) **I1=** 27.5 mA, **I2=** 22.3 mA, **I3=** 12.7 mA.

5) **Escriba la representación matemática de las dos leyes de Kirchhoff.**

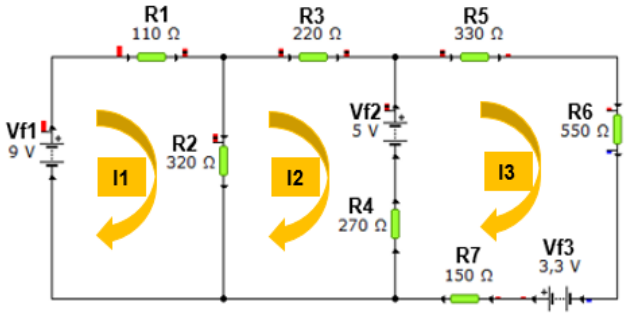
a) _____

b) _____

6) **Determine el valor de las intensidades I1 e I2 del siguiente circuito, a través del método de Gauss-Jordán.**



7) Marque con una X los literales correctos, de acuerdo al circuito:



a) $\boldsymbol{M1}: Vf1 = I1.R1 + R2(I1 - I2)$

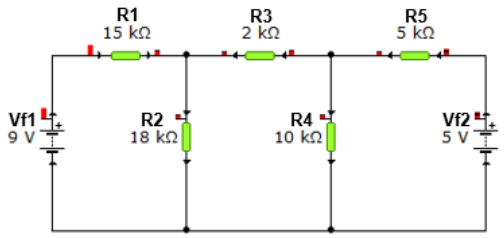
b) $\boldsymbol{I3} = 6{,}62mA$

c) $\boldsymbol{VR2} = 6{,}15V$

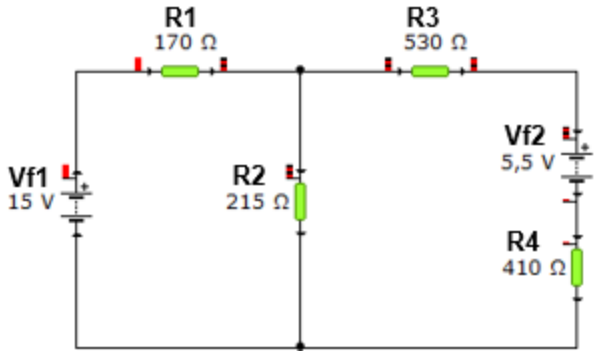
d) M3: $\mathrm{Vf2 + Vf3 \ = \ R4(I3 - I2) + I3R5 + R6I3 \ + \ R7I3}$

e) $|\boldsymbol{VR1}| = 1912630$

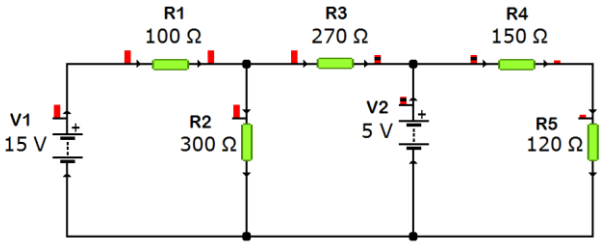
8) Resuelva el siguiente circuito a través de corrientes de malla, donde se determine el valor de las intensidades y voltajes con respecto a todas las resistencias, utilizando el método de su preferencia.



9) Determine el valor de VR1, VR2 Y VR3 del siguiente circuito, utilizando el método de su preferencia.



10) Marque con una x los literales correctos. De acuerdo al circuito:



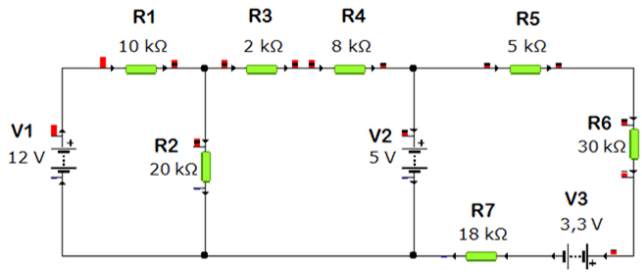
a) $\boldsymbol{Vb}$: $\frac{Vb-Va}{R1}+\frac{Vb-Vc}{R3}+\frac{Vb-Vref}{R2}=0$

b) $\boldsymbol{Vc}$: $\frac{Vc-Vb}{R3}+\frac{Vc-5\,V}{R3}+\frac{Vc-Vd}{R4}=0$

c) $\boldsymbol{Vb}$: $\frac{Vb-Va}{R1}-\frac{Vb-Vc}{R3}+\frac{Vb+Vref}{R2}=0$

d) $\boldsymbol{Vd}$: $\frac{Vd-Vc}{R4}+\frac{Vd-Vref}{R5}=0$

11) Resuelva el siguiente circuito a través del método de voltaje de nodo, encontrando las intensidades y voltajes de cada una de las resistencias, utilizando el método de sustitución.



SOLUCIONARIO

Cap.2

1) b

2) d

3) a

4) c

a) $\sum^{i} entrada = \sum^{i} salida$

b) $\sum V = 0$

5) $\boldsymbol{I1} = 0{,}04051324A => 40{,}51324mA$

$\boldsymbol{I2} = 0{,}00277952 => 2{,}78mA$

6) a, c, d

7) $\boldsymbol{I1} = 385\mu A$ $\boldsymbol{VR1} = 5{,}77V$

$\boldsymbol{I2} = 19{,}2\mu A$ $\boldsymbol{VR2} = 3{,}23V$

$\boldsymbol{I3} = 346\mu A$ $\boldsymbol{VR3} = 38{,}5mV$

$\boldsymbol{IR2} = 405\mu A$ $\boldsymbol{VR4} = 3{,}27V$

$\boldsymbol{IR4} = 327\mu A$ $\boldsymbol{VR5} = 1{,}73V$

8) **VR1** = 4.40 V

VR2 = 7.60 V

VR3 = 1.40 V

9) a, d

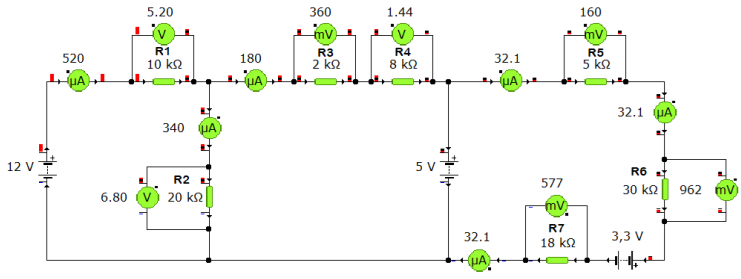
10) $\boldsymbol{I1} = 520\ uA$ $\boldsymbol{VR1} = 5.20\ V$ $\boldsymbol{VR5} = 160\ mV$

$\boldsymbol{I2} = 180\ uA$ $\boldsymbol{VR2} = 6.80\ V$ $\boldsymbol{VR6} = 962\ mV$

$\boldsymbol{I3} = 32.1uA$ $\boldsymbol{VR3} = 360\ mV$ $\boldsymbol{VR7} = 577\ mV$

$\boldsymbol{I4} = 340\ uA$ $\boldsymbol{VR4} = 1.44\ V$

Comprobación en Crocodile



BIBLIOGRAFÍA

Capítulo 1

EcuRed. (s.f.). *Leyes de Kirchhoff*. https://www.ecured.cu/Leyes_de_Kirchhoff.

Electricasas. (4 de abril de 2021). *Leyes de Kirchhoff Primera y Segunda ley de Kirchhoff, concepto, fórmulas y ejemplos*. https://www.electricasas.com/leyes-de-kirchhoff-primera-y-segunda-ley-concepto-formulas-y-ejemplos/.

Foro Histórico de las Telecomunicaciones (s.f.). *KIRCHHOFF, Gustav Robert.* https://forohistorico.coit.es/index.php/personajes/personajes-internacionales/item/kirchhoff-gustav-robert.

Quintela, F., y Melchor, R. (2002). *Redes Eléctricas de Kirchhoff*. (2a edición). REVIDE S. L. I. S. B. N. 84-921624-9-X.

Antón, J., Pascual, L., & Martín, F. (2007). *Introducción al análisis de circuitos eléctricos*. Universidad de Oviedo.

Khan Academy. (s.f.). *Leyes de Kirchhoff*. https://es.khanacademy.org/science/physics/circuits-topic/circuits-resistance/a/ee-kirchhoffs-laws.

Zapata, F. (2 de junio de 2021). *Leyes de Kirchhoff*. Lifeder. https://www.lifeder.com/leyes-kirchhoff/.

Vega, Y. (1 de abril de 2015). *Gustav Kirchhoff*. Estudios de la Física. https://estudiosdelafisica.wordpress.com/2015/04/01/gustav-kirchhoff/.

Quintela, F., & Melchor, R. (2002). *Redes eléctricas de Kirchhoff* (2ª ed.). REVIDE S. L. ISBN 978-84-945733-0-9.

Álvarez, J., Pascual, L., & Fernández, F. (2007). *Introducción al análisis de circuitos eléctricos*. Universidad de Oviedo. ISBN 9788483176375.

Capítulo 2

Burrull, F. & Malgosa. (2010). *Circuitos Eléctricos* [Proyecto Fin de Carrera, Universidad Politécnica de Cartagena]. http://labit501.upct.es/~fburrull/docencia/ElectricidadYElectromagnetismo/libro.pdf.

Lluís, J. (2011). *Teoria de circuitos* [Archivo PDF]. https://dfs.uib.es/GTE/education/industrial/teo_circuits/Tema2a.pdf

Infante, P. (2016). *Solucionario de circuitos eléctricos en estado estable*. ESPOCH. http://cimogsys.espoch.edu.ec/direccion-publicaciones/public/docs/books/2019-09-18-145221-solucionario%20de%20circuitos%20el%C3%A9ctricos%20en%20estado%20estable.pdf.

Amezcua, R. & Romo, A. (2017). Método acelerado de la técnica de mallas para la solución de circuitos eléctricos en corriente directa.

Revista de Tecnología e Innovación, 4(13), 40-48 http://www.ecorfan.org/bolivia/researchjournals/Tecnologia_e_innovacion/vol4num13/Revista_de_Tecnologia_e_Innovacion_V4_N13_5.pdf.

DICIS. (s.f.). Fundamentos de ingeniería eléctrica. http://www.dicis.ugto.mx/profesores/noehernandez/documentos/FIE/Exp%202%20M%C3%A9todo-de-las-corrientes-de-malla-y-supermalla.pdf

Khan Academy. (s.f.). *El método de la corriente de malla*. https://es.khanacademy.org/science/electrical-engineering/ee-circuit-analysis-topic/ee-dc-circuit-analysis/a/ee-mesh-current-method.

Salazar, A. (11 de julio de 2012). *Leyes de Voltajes y Corrientes de Kirchhoff* [Archivo PDF]. http://wwwprof.uniandes.edu.co/~ant-sala/cursos/FDC/Contenidos/02_Leyes_de_Voltajes_y_Corrientes_de_Kirchhoffs.pdf.

UNMdP (s.f). *presentacion_4.pdf* [Archivo PDF]. http://www3.fi.mdp.edu.ar/dtoelectrica/files/electrotecnia/presentacion_4.pdf.

Marta. (s.f.). *Regla de Cramer*. https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/algebralineal/sistemas/regla-de-cramer.html.

Problemas y Ecuaciones. (11 de enero de 2019). *Método de eliminación de Gauss.* Problemas y Ecuaciones.

https://www.problemasyecuaciones.com/matrices/metodo-eliminacion-gauss-jordan-matrices-sistemas-ecuaciones-lineales-resueltos-ejemplos-matriz.html.

Matematicas y sus fronteras. (6 de diciembre de 2018). *Etiqueta regla de Cramer*. https://www.madrimasd.org/blogs/matematicas/tag/regla-de-cramer.

AIU. (s.f.). Lección 3.4. Recuperado de https://www.aiu.edu/cursos/matematica/pdf%20leccion%203/lecci%C3%B3n%203.4.pdf

Matemáticas PR .(s.f.). *Método de Gauss*. https://matematicaspr.com/l2dj/blog/metodo-de-gauss.

Mates Fácil. (s.f.). Métodos para Sistemas de Ecuaciones: Sustitución, Igualación y Reducción. https://www.matesfacil.com/ESO/Ecuaciones/resueltos-sistemas-ecuaciones.html.

Pustilnik, I., & Gómez, F. (14 de septiembre de 2016). *Determinante de una matriz: Guía completa con ejercicios resueltos*. https://aga.frba.utn.edu.ar/determinante-matriz/

Peréz, V. (18 de abril de 2024). Regla de Cramer. de https://matematica.laguia2000.com/general/regla-de-cramer

Capitulo 3

Robbins H., & Miller, W. (2008). *Análisis de circuitos*, Cuarta ed., p. 964. http://prof.usb.ve/mirodriguez/circuito_electrico_i/libro.pdf

FCEIA. (2020). *Métodos de resolución de circuitos* [Archivo PDF]. https://www.fceia.unr.edu.ar/tci/utiles/Apuntes/CAP%203%20-%202015.pdf.

Zacarias, I. González, O. Álvarez, J. Villafaña, L. Hernández, G. Sánchez, J. y García, A.,«Análisis de circuitos mediante voltajes de nodos,» 2021. http://www.dicis.ugto.mx/profesores/noehernandez/documentos/FIE/Exp%201

Sadiku, N. (2004) Fundamentos de Circuitos. https://media.utp.edu.co/ingenieria-fisica/archivos/Practica_4Gen.pdf.

Alexander, M. Sadiku, Fundamentos de circuitos eléctricos, Quinta ed., p. 865. http://www.ie.tec.ac.cr/sarriola/CC/Libro/Fundamentos%20de%20circuitos%20el%C3%A9ctricos,%205ta.%20Edici%C3%B3n%20-%20Charles%20K.%20Alexander-FREELIBROS.ORG.pdf

Gustavo L. Ferro, (2016). Metodos de Analisis de Circuitos Electricos en C.C. Y C.A.

Salazar, J. *Análisis por Nodos y Mallas* [Archivo PDF]. Universidad de los Andes. http://wwwprof.uniandes.edu.co/~ant-sala/cursos/FDC/Contenidos/03_Analisis_por_Nodos_y_Mallas.pdf.

Palacios, F. (2008). *Sistemas de ecuaciones lineales: Regla de Cramer*. http://epsem.upc.edu/~fpq/ale-hp/modulos/aplicaciones/cramer.pdf

Indaburo, M. (2016). *Método de Cramer* [Archivo PDF]. https://www.guao.org/sites/default/files/Metodo%20de%20Cramer.pdf

Bressan, J., & Ferrazzi de Bressan, A. (2008). *Interpretación geométrica de la regla de Cramer*. Revista Electrónica de Investigación, 3(1). https://www.redalyc.org/pdf/2733/273320549001.pdf

Vélez, E. (2012). *Sistemas de ecuaciones lineales y determinantes*. http://docs.uprb.edu/deptmate/material%20suplementario/CIME/10mo%20a%2012mo/Sistemas%20de%20Ecuaciones%20Lineales%20y%20Determinantes.pdf

Cruz, M. (s.f.). *Método de Gauss-Jordan*. http://www.gridmorelos.uaem.mx/~mcruz/cursos/mn/JORDAN.pdf

Capítulo 4

Alexander, C., & Sadiku, M. (2017). *Fundamentals of Electric Circuits* (6th ed.). McGraw-Hill Education. ISBN 978-0-07-802822-9

Dorf, R., & Svoboda, J. (2014). Introduction to Electric Circuits (9th ed.). Wiley. ISBN-13: 978-1-118-47750-2

Boylestad, R. (2010). Introductory Circuit Analysis (12th ed.). Pearson Education. ISBN-13: 978-0137146666.

Hayt, W., Kemmerly, J., & Durbin, S. (2018). Análisis de circuitos en ingeniería (8.ª ed.). McGraw-Hill. ISBN: 978-970-10-6107-7

Nilsson, J., & Riedel, S. (2019). Electric Circuits (11th ed.). Pearson.

Irwin, J., & Nelms, R. (2011). Basic Engineering Circuit Analysis (10th ed.). Wiley. ISBN-13 978-0-470-63322-9

Vargas, J. (2007). Análisis de circuitos eléctricos con métodos de nodos y mallas. Revista Educación en Ingeniería, 2(3), 22–28

Analizando los circuitos eléctricos, se publicó en el mes de noviembre de 2026.

ISBN: 978-9907-802-66-5

Grupo Editorial BLR
Ecuador
Cel: +593 98 320 4362
https://grupoblr.com/
publicaciones@grupoblr.com

BIOGRAFÍA DE AUTORES

Johnny Paul Novillo Vicuñ:
Cuento con una experiencia de más de 20 años en elcampo de la docencia, tiempo durante el cual me he desempeñado como profesor en el Instituto Superior Tecnológico El Oro, Universidad Tecnológica San Antonio de Machala y en la actualidad en la Universidad Técnica de Machala.

Ángel Mauricio Ramón Noblecill:
Ingeniero de Sistemas por Universidad Católica de Cuenca, Máster en Seguridad Informática por la Universidad Internacional de La Rioja y Magíster en Educación, mención Gestión del Aprendizaje Mediado por TIC, por la Universidad Tecnológica Israel. Analista Distrital TIC, docente Instituto Ismael Pérez Pazmiño, docente de la Universidad Técnica de Machala.

ANALIZANDO LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Estimado lector, esta obra didáctica y formativa aborda el estudio de los sistemas eléctricos y el análisis de circuitos en corriente continua (CC) como una competencia transversal e indispensable para las disciplinas de la ingeniería y la tecnología moderna. El texto parte de la premisa de que el dominio analítico del flujo de energía no debe sustentarse en la mecanización algebraica de fórmulas, sino en la comprensión conceptual de las leyes físicas fundamentales y en la interpretación crítica de las magnitudes eléctricas calculadas.

El desarrollo temático avanza de manera progresiva y estructurada, partiendo de las Leyes de Kirchhoff hacia técnicas sistemáticas de mayor complejidad analítica. La obra desglosa con rigurosidad matemática el método de corrientes de malla y el método de voltajes de nodo, abordando de forma exhaustiva casos especiales como supermallas y supernodos. Asimismo, articula los principios físicos de la teoría de circuitos con herramientas de resolución algebraica de sistemas de ecuaciones lineales, capacitando al lector para discriminar y seleccionar la estrategia analítica más eficiente en función de la topología y variables de cada red eléctrica.

En su conjunto, el volumen se consolida como un manual de apoyo pedagógico fundamental para estudiantes y docentes del área técnica y de ingeniería, proporcionando una sólida base metodológica orientada a resolver problemas reales de análisis de circuitos y a cimentar el estudio avanzado de sistemas eléctricos e infraestructuras tecnológicas.

GRUPO BLR

Grupo Editorial BLR
Ecuador
Cel: +593 98 320 4362
https://grupoblr.com/
publicaciones@grupoblr.com

ISBN: 978-9907-802-66-5

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MACHALA
1969