GRUPO BLR

NÚMEROS COMPLEJOS: FUNDAMENTOS Y APLICACIONES (GUÍA TEÓRICO-PRÁCTICA PARA BACHILLERATO Y NIVEL INICIAL UNIVERSITARIO)

ISBN: 978-9907-852-01-1

José Campoverde Jara

2026

NÚMEROS COMPLEJOS: FUNDAMENTOS Y APLICACIONES (GUÍA TEÓRICO-PRÁCTICA PARA BACHILLERATO Y NIVEL INICIAL UNIVERSITARIO)

José Campoverde Jara

AUTOR



UTMACH

Este libro ha sido debidamente examinado y valorado en la modalidad doble par ciego con fin de garantizar la calidad científica.

©Grupo Editorial BLR
Universidad Técnica de Machala
Riobamba – Ecuador
Correo: publicaciones@grupoblr.com
https://grupoblr.com/libros-investigo
REPOSITORIO



Campoverde, J. (2026) Números complejos: Fundamentos y aplicaciones (Guía teórico-práctica para bachillerato y nivel inicial universitario). Grupo Editorial BLR.

© José Campoverde Jara

Números complejos: Fundamentos y aplicaciones
(Guía teórico-práctica para bachillerato y nivel inicial universitario)I

ISBN: 978-9907-852-01-1

El copyright promueve la libertad de expresión, protege la diversidad de ideas y conocimiento, además apoya la libre expresión. Se prohíbe de manera rigurosa la producción o el almacenamiento de esta publicación, ya sea en su totalidad o en parte, está estrictamente prohibido por ley, incluyendo el diseño de la portada, así como su difusión a través de cualquiera de sus medios, ya sean electrónicos, mecánicos, ópticos, de grabación o incluso de fotocopia, sin permiso de los propietarios de los derechos de autor.

FILIACIÓN DEL AUTOR

José Campoverde Jara

Universidad Técnica de Machala

Correo Electrónico: jcampoverde1@utmachala.edu.ec

ORCID: https://orcid.org/0009-0000-8538-010X

PREFACIO

Este libro no nace únicamente de mi experiencia como docente de Matemática; nace también de un legado familiar profundamente vinculado con la educación. Desde mi formación comprendí que enseñar no consiste solamente en transmitir contenidos, sino en acompañar a los estudiantes para que descubran sus capacidades, desarrollen seguridad en su aprendizaje y encuentren en el conocimiento una oportunidad de crecimiento.

Deseo reconocer de manera especial a mis padres, el Dr. José Campoverde Cárdenas y la Lcda. Martha Jara López, quienes han constituido un referente permanente de compromiso, vocación y servicio educativo. De ellos recibí el ejemplo de valorar la educación como una herramienta de transformación personal y social.

Este texto representa, de manera particular, la continuidad de una obra impulsada por mi padre, el Dr. José Campoverde Cárdenas, quien fue su gran gestor. Asumo con respeto y responsabilidad la tarea de darle continuidad, procurando conservar su propósito formativo y enriquecerlo desde mi experiencia docente, con el interés de ofrecer a los estudiantes un material claro, ordenado y útil para su aprendizaje.

La obra ha sido concebida como una guía teórico-práctica que integra definiciones, procedimientos, ejemplos y ejercicios. Su propósito es facilitar la comprensión de contenidos matemáticos que con frecuencia resultan complejos por su lenguaje simbólico y nivel de abstracción, sin perder el rigor que caracteriza a esta disciplina.

Aspiro a que este libro acompañe a estudiantes de Bachillerato y de los primeros niveles universitarios en su proceso de aprendizaje, y que también constituya un recurso de apoyo para docentes. Más que presentar resultados o procedimientos, deseo que estas páginas contribuyan a fortalecer el razonamiento, la perseverancia y la confianza necesarias para aprender matemática.

José Alejandro Campoverde Jara

ÍNDICE

PREFACIO……i

ÍNDICE……iii

ÍNDICE DE TABLAS……xii

ÍNDICE DE FIGURAS……xiii

INTRODUCCIÓN……..xi v

CAPÍTULO I……..16

1 NÚMEROS COMPLEJOS……..16

1.1 Definiciones y operaciones de números complejos 17

1.2 Número complejo..... 17

1.3 Complejo conjugado 19

1.4 Módulo de complejo 19

1.5 Operaciones..... 22

1.5.1 Suma……...22

1.5.2 Resta……...24

1.5.3 Producto 24

1.5.4 División..... 26

1.6 Ejercicios 30

1.7 Respuestas 34

1.8 Potencia de un número de complejo 35

1.8.1 Potencia de la unidad imaginaria 35

1.8.2 Potenciación de un número complejo 36

1.8.3 Extracción de la raíz cuadrada de un numero complejo 37

1.9 Ejercicios 41

1.10 Respuestas 44

1.11 Forma trigonométrica 46

1.11.1 Argumento 46

1.11.2 Producto de números complejos de forma trigonométrica 49

1.11.3 Interpretación geométrica del producto de números complejos……51

1.11.4 División de números complejos dados en forma trigonométrica…….54

1.11.5 Potenciación de un numero complejo dado en forma trigonométrica 56

1.11.6 Radicación de números complejos dados en forma trigonométrica 59

1.12 Ejercicios 64

1.13 Respuestas 68

1.14 Forma exponencial de un numero complejo 70

1.15 Ejercicios 76

1.16 Respuestas 77

CAPÍTULO II..... 78

2 ALGEBRA LINEAL 78

2.1 Matrices y determinantes 78

2.2 Matriz 79

2.3 Matriz nula 80

2.4 Matriz cuadrada 80

2.5 Matriz escalar 81

2.6 Suma de matrices 82

2.7 Producto escalar 85

2.8 Resta de matrices 86

2.9 Producto de matrices 89

2.10 Ejercicios 92

2.11 Respuestas 97

2.12 Clasificación de las matrices cuadradas 100

2.12.1 Traza de una matriz 104

2.12.2 Potencia de una matriz 106

2.13 Ejercicios 107

2.14 Respuestas 110

2.15 Transpuesta de una matriz 111

2.16 Ejercicios 115

2.17 Respuestas 117

2.18 Determinantes 117

2.18.1 Determinantes de segundo y tercer orden 117

2.19 Ejercicios 121

2.20 Respuestas 124

2.21 Desarrollo por los elementos de una fila o columna 125

2.21.1 Transformaciones elementales 133

2.22 Ejercicios 136

2.23 Respuestas 139

2.24 Inversa de una matriz 140

2.25 Ejercicios 149

2.26 Respuestas 152

2.27 Sistemas de ecuaciones lineales 153

2.27.1 Resolución de ecuaciones matriciales 153

2.28 Ejercicios 157

2.29 Respuestas 162

CAPÍTULO III…….164

3 MÈTODOS DE DEMOSTRACIÒN MATEMÀTICA……164

3.1 Métodos de demostración 164

3.1.1 Importación de los métodos de demostración 165

3.2 Tipos de demostración 165

3.2.1 Método directo de demostración 165

3.3 Método por reducción al absurdo 166

3.3.1 Definiciones básicas 166

3.3.2 Proposiciones 168

3.3.3 Conectores lógicos 169

3.4 Disyunción inclusiva o débil de pVq 171

3.5 Disyunción exclusiva o fuente 172

3.6 Negación 173

3.7 Condicional 174

3.8 Variaciones de la condicional 175

3.9 Ley de la contrarrecíproca 177

3.10 Ejercicios 177

3.11 Soluciones 178

3.12 Bicondicional 180

3.12.1 Demostraciones usando tablas de verdad 182

3.13 Ejercicios 183

3.14 Reglas de inferencia 184

3.14.1 Modus ponendo ponens (regla de separación) 184

3.15 Ejercicios 186

3.16 Doble negación 187

3.17 Modus tollendo tollens 187

3.18 Ejercicios 188

3.19 Conmutativa 189

3.20 Adjunción 189

3.21 Simplificativa 190

3.22 Modus tollendo ponens 190

3.23 Adición 192

3.24 Simplificación disyuntiva 193

3.25 Sigolismo disyuntivo 194

3.26 Ejercicios 195

3.27 Bicondicional 196

3.28 Conjunción negativa 197

3.29 Disyunción exclusive 197

3.30 Algebra de proposiciones 199

3.30.1 Disyunción 199

3.30.2 Conjunción 199

3.31 Ejercicios 199

3.32 Métodos indirectos 204

3.32.1 Regla de la premisa p 204

3.33 Ley del absurdo 205

3.34 Regla demostración condicional 206

CAPÍTULO IV…….208

4 TRIGONOMETRIA……...208

4.1 Identidades trigonométricas 208

4.1.1 Identidades reciprocas 209

4.1.2 Razón 209

4.1.3 Relaciones pitagóricas 209

4.2 Ejercicios 211

4.3 Suma y diferencia de dos ángulos 212

4.3.1 Suma 212

4.3.2 Diferencia 212

4.4 Ejercicios 215

4.5 Ángulo doble 215

4.6 Ángulo medio 216

4.7 Ejercicios 217

4.8 Transformar en productos sumas y diferencias de senos y cosenos……..217

4.9 Ejercicios 219

4.10 Transformación del producto en una suma algebraica 220

4.11 Ejercicios 220

4.12 Ecuaciones trigonométricas 221

4.13 Ejercicios 222

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS……...224

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Conjunción. 170
Tabla 2. Disyunción inclusiva o débil de pV q 172
Tabla 3. Disyunción exclusiva o fuente. 172
Tabla 4. Condicional. 174
Tabla 5. Variaciones de la condicional. 176
Tabla 6. Ejercicio 3 180
Tabla 7. Bicondicional 181
Tabla 8. Bicondicional 2. 181

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Número complejo. 18
Figura 2. Números complejos conjugados..... 19
Figura 3. Representación de los números complejos con vectores. 23
Figura 4. Producto de dos números complejos. 25
Figura 5. Argumento del número complejo. 47
Figura 6. Interpretación geométrica del producto de números complejos. 51
Figura 7. Puntos correspondientes a los números w0, w1, w2, w3. 64

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de la matemática representa un desafío cuando el estudiante debe relacionar conceptos abstractos, lenguaje simbólico, procedimientos algebraicos y representaciones gráficas. Esta dificultad puede incrementarse cuando los contenidos se estudian de manera aislada, sin una secuencia que vincule las definiciones con los ejemplos y la resolución de ejercicios. En este contexto, el presente libro reúne temas fundamentales que contribuyen al fortalecimiento del razonamiento matemático, la argumentación y la capacidad de resolver situaciones.

El objetivo general de la obra es proporcionar una guía teórico-práctica que favorezca la comprensión conceptual y el dominio procedimental de contenidos esenciales de matemática. De manera específica, se busca desarrollar la interpretación y las operaciones con números complejos; afianzar el uso de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales; fortalecer los métodos de demostración y el razonamiento lógico; y aplicar identidades y ecuaciones trigonométricas en la resolución de ejercicios.

La obra se organiza en cuatro ejes temáticos. El primer eje aborda los números complejos, sus representaciones, operaciones, potencias, radicación y sus formas trigonométrica y exponencial. El segundo eje desarrolla contenidos de álgebra lineal mediante matrices, determinantes, inversas y sistemas de ecuaciones lineales. El tercer eje trata los métodos de demostración, las proposiciones, los conectores lógicos, las tablas de verdad y las reglas de inferencia. Finalmente, el

cuarto eje presenta identidades trigonométricas, fórmulas de suma y diferencia, ángulo doble, ángulo medio y ecuaciones trigonométricas.

Cada eje incluye definiciones, propiedades, ejemplos resueltos y ejercicios de práctica. Esta organización permite que el lector avance de la comprensión de cada concepto a su aplicación, con el propósito de construir aprendizajes progresivos y útiles para estudios posteriores.

CAPITULO I

1 NÚMEROS COMPLEJOS

DESTREZAS CON CRITERIO DE DESEMPEÑO

ONCDM.5.1.1. Analizar la construcción histórica de los números complejos y los aportes a la matemática.

ONCDM.5.1.2. Definir un número complejo como la combinación de dos componentes llamadas: parte real y parte imaginaria.

ONCDM.5.1.3. Comprender y aplicar propiedades algebraicas de las operaciones de adición y producto en cálculos con números complejos en la resolución de ejercicios numéricos y problemas de aplicación.

ONCDM.5.1.4. Obtener el conjugado de un número complejo, calcular el módulo de un número complejo y calcular la distancia entre números complejos para resolver problemas, y ejercicios numéricos y algebraicos.

ONCDM.5.1.5 Representar y resolver operaciones con un número complejo en forma Binómica, Geométrica y Polar.

ONCDM.5.1.6. Calcular la potencia de un número complejo con exponentes enteros aplicando la fórmula de Moivre y las raíces n-ésimas de un número complejo

ONCDM.5.1.7. Transformar números complejos de la forma polar a la forma exponencial aplicando la fórmula de Euler

1.1 Definiciones y operaciones de números complejos

Toda la teoría de los números complejos puede ser desarrollada aritméticamente sin utilizar representación geométrica alguna; pero es útil mostrar que la creación de estos nuevos números ha sido en parte motivada por la necesidad de poder representar numéricamente los puntos de un plano, de igual modo que los números reales surgieron en la mente de los matemáticos para poder representar todos los puntos de una recta.

En vista de la insuficiencia del conjunto de los números reales, lo ampliaremos creando nuevos entes, cada uno se compone de nuevos entes, cada uno de los cuales se compone de un par de números reales, de igual modo que todo número racional se compone con un par de números naturales. Introduciremos el nuevo número i, la unidad imaginaria, que posee la propiedad de que su cuadrado sea igual a –1: $i^2 = -1$.

1.2 Número complejo

Se denomina número complejo a un ente abstracto representado por un par de números reales cualesquiera, dados en orden prefijado. Los números $a + bi$, donde a y b son dos números reales Figura 1, se llaman complejos. El numero a se llama parte real; bi, parte imaginaria del número complejo**.** (Ahlfors, 1979; Brown & Churchill, 2014; Needham, 1997).

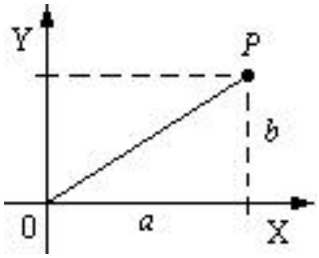


Figura 1. Número complejo.

El numero complejo $z = a + bi$ se admite representarlo por un punto P en el plano; la abscisa de este punto es igual a la parte real a, la ordenada es igual a b, es decir, al coeficiente de la unidad imaginaria. A todo número complejo corresponde un punto determinado del plano, y, viceversa, a cada punto del plano corresponde un número complejo determinado

Es decir, reciben el nombre de números complejos las expresiones de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales, i, cierto símbolo, para las cuales las nociones de igualdad y operaciones de adición y multiplicación se introducen del siguiente modo

Definición

Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ se consideran iguales si y sólo si $a = c$ y $b = d$. Los números complejos que no satisfacen esta condición de igualdad se llaman desiguales.

Si $a = 0$, $b \neq 0$, el numero complejo $a + bi$ se convierte en un numero imaginario puro bi; b se llama coeficiente de la unidad imaginaria. Si $b = 0$, el numero complejo $a + bi$ deviene un número real igual a a.

El conjunto de números complejos contiene, como parte, tanto todos los números reales como todos los números imaginarios puros; en otras palabras, los números reales, así como los números imaginarios son casos particulares de números complejos.

1.3 Complejo conjugado

Los números complejos $z = a + bi$ y $\bar{z} = a + bi$ se llaman conjugados; se diferencian sólo por el signo ante la parte imaginaria.

Un par de números complejos conjugados se representan por los puntos P y Q, simétricos respecto del eje de abscisas. En la figura 2 los puntos P y Q representan los números complejos conjugados.

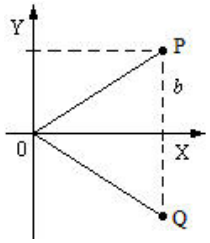


Figura 2. Números complejos conjugados.

Ejemplo

El conjugado del número complejo $z = 5 + 3i$ es $\bar{z} = 5 - 3i$.

1.4 Módulo de complejo

Lleva el nombre de módulo del número complejo $z = a + bi$, la longitud del vector que corresponde a dicho número. Es decir, el número real

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$. (Saff & Snider, 2003; Spiegel et al., 2009; Zill & Shanahan, 2009).

El número *r* es positivo y se anula sólo cuando $a = 0$, $b = 0$. El módulo de un número complejo se designa con dos líneas verticales a cada lado del número. Es decir

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}\ .$$

En el caso particular cuando $b = 0$, tendremos

$$|a + 0 \cdot i| = \sqrt{a^2 + 0^2} = |a|\ ,$$

es decir, el módulo de un número real es el valor absoluto de ese número. Por eso, el módulo de un número complejo se llama también valor absoluto de ese número.

Ejemplo

Hallar los módulos de los números complejos $z = 2 - i$, $w = 2\sqrt{6} + 5i$, $u = i$.

Solución

Aplicando la definición, obtenemos:

$$|z| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}\ , \quad |w| = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 + 5^2} = 7\ .$$

Para calcular el módulo de *u* no es necesario emplear la definición. La longitud del vector *u* = *i* es, evidentemente, igual a uno, por ello, $|u|=1$. ∇

Todos los números complejos de módulo igual a la unidad se representan por los puntos de una circunferencia unitaria con centro en el origen de coordenadas.

Ejemplo

¿Cuál es el sentido geométrico de la desigualdad $|z|<1$?

Solución

El módulo del número complejo *z*, es decir, $|z|$, significa la distancia del origen de coordenadas al punto *z*; ya que esta distancia es menor que 1, describimos del origen de coordenadas una circunferencia de radio *r* = 1. Todos los puntos interiores del círculo representan los números complejos *z*, para los cuales $|z|<1$. Para los puntos de la circunferencia, tendremos que $|z|=1$. Los puntos externos son números complejos que satisfacen la desigualdad $|z|<1$. ∇

Ejemplo

¿Cómo están dispuestos los puntos complejos que satisfacen la desigualdad $|z-2|<3$?

Solución

El módulo de la diferencia de los números z y 2, es decir, $|z-2|$, denota la distancia del punto $z_1 = 2$ al punto z, que debe ser menor que 3. Por eso, desde el punto 2 trazamos una circunferencia de radio igual a 3 unidades; los puntos complejos interiores de esta circunferencia son soluciones de la desigualdad $|z-2|<3$. ∇

1.5 Operaciones

Las operaciones que definamos con los números complejos han de satisfacer las dos condiciones exigibles a toda generalización.

1) Han de cumplir las mismas leyes formales que las operaciones con números reales.

2) Cuando los datos sean reales, los resultados deben coincidir con los hasta ahora obtenidos.

En este principio de permanencia de las leyes formales se han inspirado las definiciones que se darán a continuación, para las diversas operaciones con números complejos.

1.5.1 Suma

La representación de los números complejos con vectores permite dar una sencilla interpretación geométrica de las operaciones con ellos. La suma de números complejos puede ser entendida geométricamente como un vector igual a la suma de los vectores correspondientes a los números complejos sumados tal como lo observamos en la figura 3.

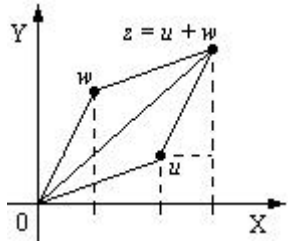


Figura 3. Representación de los números complejos con vectores.

Se denomina suma de los números complejos $u = a + bi$ y $w = c + di$ el número complejo $z = (a + c) + (b + d)i$, obtenido sumando, respectivamente, las primeras y segundas entradas de los dos números dados, cuyas partes real e imaginaria son iguales respectivamente a la suma de las partes reales e imaginarias de los sumandos u y w.

Para indicar la adición se usa el signo ordinario de suma, de modo que el contenido de esta definición puede expresarse convenientemente así:

$$u + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i = z.$$

Ejemplo

Hallar la suma de los números complejos $z = -2 + 3i$ y $w = 7 - 8i$.

Solución

Según la definición de suma, hallamos

$$z + w = (-2 + 3i) + (7 - 8i) = (-2 + 7) + (3 - 8)i = 5 - 5i.$$

1.5.2 Resta

Por sustracción de un número complejo $u = a + bi$ de otro número complejo $w = c + di$ se sobrentiende la determinación de un número $z = (a – c) + (b – d)i$ que sumando al sustraendo w nos da el minuendo u.

Para indicar la sustracción se usa el signo ordinario de resta, de modo que el contenido de esta definición puede expresarse así:

$$u - w = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i = z$$

En la sustracción de dos números complejos se restan separadamente sus partes reales e imaginarios. Geométricamente la sustracción de números complejos significa la resta de sus correspondientes vectores.

Ejemplo

Se dan los números complejos $z = - 1 + 6i$ y $w = 2 + 5i$. Hallar la diferencia $w – z$.

Solución

De acuerdo con la definición, hallamos:

$w - z = (2 + 5i) - (-1 + 6i) = 3 - i$. ∇

1.5.3 Producto

Podemos observar que el producto de dos números complejos también es un número complejo. Esta regla de la multiplicación se extiende también a un número mayor de factores complejos

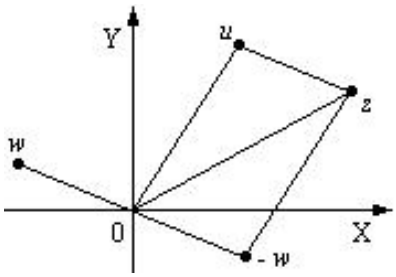


Figura 4. Producto de dos números complejos.

Se denomina producto de los números $u = a + bi$ y $w = c + di$ el número complejo $z = (ac – bd) + (ad + bc)i$. La multiplicación se indica cuando no exista peligro de confusiones, puede omitirse el signo de multiplicación.

Dos números complejos u y w se multiplican según la regla ordinaria del producto de polinomios; en el resultado i^2 se sustituye por –1 y se separa la parte real de la imaginaria:

$uw = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac – bd) + (ad + bc)i = z$.

Ejemplo

Hallar la multiplicación de los números complejos $z = - 2 + 3i$ y $w = 7 – 8i$.

Solución

El producto se halla multiplicando de modo formal los binomios $(- 2 + 3i)$ y $(7 – 8i)$:

$$zw = (- 2 + 3i)\,(7 – 8i) = - 14 + 16i + 21i – 24i^2 = 10 + 37i. \quad \nabla$$

Del producto de números complejos puede resultar un número real. En particular, esto ocurrirá al multiplicar dos números complejos conjugados:

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2i^2 = a^2 + b^2 = r^2,$$

donde r es el módulo de cada uno de los factores. Así pues, el producto de dos números complejos conjugados es un número real, igual al cuadrado de su módulo común.

1.5.4 División

Se llama cociente de la división de dos números complejos $u = a + bi$ y $w = c + di$ el número complejo $z = x + yi$ que multiplicado por el divisor nos da el dividendo.

De este modo, si los coeficientes c y d son simultáneamente distintos de cero, suponiendo que $\frac{a+bi}{c+di} = x + yi$, tendremos: $a + bi = (c + di)(x + yi)$,

o bien

$$a + bi = (cx - dy) + (dx + cy)i.$$

De la condición de igualdad de dos números complejos se deduce que

$$\begin{cases} cx - dy = a \\ dx + cy = b \end{cases}.$$

Resolviendo este sistema, hallamos que:

$$x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{cb+ad}{c^2+d^2}$$

Por lo tanto,

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{cb+ad}{c^2+d^2}\,i$$

Este resultado se puede obtener más simplemente multiplicando el dividendo y el divisor por un número conjugado al divisor:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd+(cb-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{cb-ad}{c^2+d^2}\,i\,.$$

Ejemplo

Se dan los números complejos $z = -1 + 6i$ y $w = 2 + 5i$. Hallar el cociente w/z.

Solución

El cociente se halla con la fórmula correspondiente:

$$\frac{w}{z} = \frac{2+5i}{-1+6i} = \frac{(-1)(2)+(6)(5)}{(-1)^2+(6)^2} + \frac{(-1)(5)-(2)(6)}{(-1)^2+(6)^2}\,i = \frac{28}{37} - \frac{17}{37}\,i\,. \quad \nabla$$

Ejemplo

Simplifique la operación $\dfrac{3+i}{(1+i)(1-2i)}$.

Solución

Después de multiplicar los números en el denominador, obtenemos

$$z = \frac{3+i}{(1+i)(1-2i)} = \frac{3+i}{1-2i+i+2} = \frac{3+i}{3-i}.$$

A continuación, tenemos la posibilidad de multiplicar y dividir por el conjugado del número complejo 3 – *i*, entonces

$$z = \frac{3+i}{(1+i)(1-2i)} = \frac{(3+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{9+6i-1}{9+1} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i. \quad \nabla$$

De las cuatro operaciones fundamentales, la adición y la multiplicación se llaman operaciones directas y por medio de ellas se definen las operaciones inversas: sustracción y división.

Solución

Las operaciones de adición y multiplicación poseen las siguientes propiedades:

1) Conmutatividad de la suma

$$z + w = w + z$$

2) Asociatividad a la suma

$$(z + u) + w = z + (u + w)$$

3) Conmutatividad de la multiplicación

$$zw = wz$$

4) Asociatividad de la multiplicación

$$(zw)u = z(wu)$$

5) Distributividad

$$z(w + u) = zw + zu$$

6) La suma de los conjugados de dos números complejos es igual al conjugado de su suma.

$$\overline{z} = \overline{u} + \overline{w}.$$

7) El producto de los conjugados de dos números es igual al conjugado de su producto.

$$\overline{z} = \overline{u}\,\overline{w}.$$

Ambas proposiciones se verifican directamente comparando la suma o el producto de dos números complejos con la suma o el producto de sus conjugados. De esto se deduce que el conjugado de la diferencia o cociente de dos números complejos es igual, respectivamente, a la diferencia o al cociente de sus conjugados, lo cual, con la notación adoptada, se expresa así:

$$\overline{(z-u)} = \overline{z} - \overline{u} \quad \textbf{y} \quad \overline{\left(\frac{z}{u}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{u}}.$$

Ejemplo

Calcular los cocientes:

a) $\dfrac{1-20\sqrt{5}\,i}{7-2\sqrt{5}\,i}$; b) $\dfrac{\sqrt{1+a}+i\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-i\sqrt{1-a}}-\dfrac{\sqrt{1-a}+i\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}-i\sqrt{1+a}}$.

Solución

a) Multiplicamos numerador y denominador por el número conjugado del denominador:

$$\frac{1-20\sqrt{5}\,i}{7-2\sqrt{5}\,i}\cdot\frac{7+2\sqrt{5}\,i}{7+2\sqrt{5}\,i}=\frac{(7+200)+(2\sqrt{5}-140\sqrt{5})i}{49+20}$$

$$=\frac{207-140\sqrt{5}i}{69}=3+\frac{140\sqrt{5}}{69}i$$

b) Multiplicamos numerador y denominador por el número conjugado del denominador de cada término:

$$\frac{\sqrt{1+a}+i\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-i\sqrt{1-a}}\cdot\frac{\sqrt{1+a}+i\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}+i\sqrt{1-a}}-\frac{\sqrt{1-a}+i\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}-i\sqrt{1+a}}\cdot\frac{\sqrt{1-a}+i\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}+i\sqrt{1+a}}$$

$$\frac{2a+2\sqrt{1-a^2}\,i}{2}-\frac{-2a+2\sqrt{1-a^2}\,i}{2}=2a.\quad \nabla\mathbf{F}$$

1.6 Ejercicios

1.- Determine la suma y el producto de los números complejos z_1 y z_2 si:

a) $z_1=4+5i$, $z_2=3-2i$

b) $z_1=0.5-3.2i$, $z_2=1.5-0.8i$

c) $z_1=\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i$, $z_2=\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i$

d) $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, $z_2 = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$

e) $z_1 = 0.1 - 0.2i$, $z_2 = 1.3 + 2.3i$

f) $z_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$, $z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}i$

2.- Hallar la suma, la diferencia, el producto y el cociente de los números complejos *u* y *w* si:

a) $u = -3 + 4i$, $w = 3 - 2i$

b) $u = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}i$, $w = \frac{3}{2} - \frac{4}{5}i$.

3.- Determine la diferencia $z_2 - z_1$ y el cociente $\frac{z_2}{z_1}$ si:

a) $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 0.4 - 0.2i$;

b) $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 0.6$;

c) $z_1 = \sqrt{5} - i$, $z_2 = \sqrt{2} - 2i$;

d) $z_1 = \frac{1}{3} - i$, $z_2 = 2 + \frac{5}{3}i$;

e) $z_1 = 0.8 + 0.2i$, $z_2 = 2.2 + 1.4i$;

f) $z_1 = \sqrt{3} - \sqrt{2}\,i$, $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}\,i$

4.- Determine la parte imaginaria *z* si:

a) $z=(2-i)^3(2+11i)$

b) $z=\dfrac{2-3i}{1+4i}+i^6$

c) $z=\dfrac{5+2i}{2-5i}-\dfrac{3-4i}{4+3i}-\dfrac{1}{i}$

d) $z=\dfrac{2+5i}{i}-\dfrac{i}{2-5i}$.

5.- Simplifique las expresiones:

a) $\dfrac{2-3i}{2+3i}-\dfrac{2+3i}{2-3i}$;

b) $3i\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3}i\right)\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}i\right)$;

c) $\dfrac{13+12i}{6i-8}+\dfrac{(1+2i)^2}{2+i}$;

d) $\dfrac{11-3i}{3+i}-\dfrac{2-5i}{(1+i)^2}$;

e) $\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i}$;

f) $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$;

g) $2i\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

6.- Determine con qué valores reales de *x* e *y* los números complejos z_1 y z_2 son iguales:

$$z_1 = y^2 - 7y + 9xi \quad \textbf{y} \quad z_2 = -12 + 20i + x^2 i$$

7.- Dado $(1+i)x + (5-2i)y = 2 - i$ **. Encuentre** $x, y \in \mathrm{R}$.

8.- Determine con qué valores reales de *x* e *y* los números complejos z_1 y z_2 son conjugados:

$$z_1 = 8x^2 - 20i^9 \quad \textbf{y} \quad z_2 = 9x^2 - 4 + 10yi^3$$

9.- Resuelva las ecuaciones:

a) $(1+2i)(z-i) + (4i-3)(1-iz) + 1 + 7i = 0$;

b) $z^2 + \bar{z} = 0$;

c) $z^2 - \bar{z} = 0$.

10.- Resuelva el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1 + i \\ 3z_1 + iz_2 = 2 - 3i \end{cases}.$$

11.- Resolver el sistema de ecuaciones:

a) $\begin{cases} (3-2i)x - (3+2i)y = 2 - 3i \\ (2+i)x + (2-i)y = 1 + 3i \end{cases}$;

b) $\begin{cases} (1-i)x + (2-2i)y = 4 \\ (1+i)x - (1-2i)y = 1 - i \end{cases}$;

c) $\begin{cases} (1+2i)x - (2+3i)y = 1 + 2i \\ (2-i)x + (2-3i)y = 1 - 2i \end{cases}$.

12.- Trazar los puntos que representan los números complejos:

$$-1+i,\ \sqrt{2}-i,\ 3-2i,\ 2+3i.$$

13.- Determine el módulo del número complejo *z*:

a) $z=-4$; b) $z=-i$; c) $z=-5-2\sqrt{2}\,i$.

1.7 Respuestas

1.- a) $7+3i,\ 22+7i$; b) $2-4i,\ -\frac{181}{100}-\frac{26}{5}i$; c) $2\sqrt{2}$, **5;** d) $2-3i,\ -\frac{1}{2}-2i$; e) $\frac{7}{5}+\frac{21}{10}i,\ \frac{59}{100}-\frac{3}{100}i$; f) $\sqrt{2}(2+i),\ 3+4i$.

2.- a) $u+w=2i,\ u-w=-6+6i,\ uw=-1+18i,\ \frac{u}{w}=-\frac{17}{13}+\frac{6}{13}i$; b) $u+w=\frac{7}{4}-\frac{41}{20}i,\ u-w=-\frac{5}{4}-\frac{9}{20}i,\ uw=-\frac{5}{8}-\frac{83}{40}i,\ \frac{u}{w}=\frac{275}{578}-\frac{335}{578}i$

3.- a) $-\frac{1}{5}(13+21i),\ \frac{1}{125}(2-11i)$; b) $-\frac{2}{5}+2i,\ \frac{3}{25}(1+2i)$; c) $-\sqrt{5}+\sqrt{2}-i,\ \left(\frac{\sqrt{10}}{6}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)i$; d) $\frac{1}{3}(5+8i),\ -\frac{1}{10}(9+23i)$; e) $\frac{1}{5}(7+6i),\ 3+i$; f) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})+(\sqrt{2}+\sqrt{3})i,\ i$.

4.- a) **0;** b) $-\frac{11}{17}i$; c) $3i$; d) $-\frac{60}{29}i$.

5.- a) $-\frac{24}{13}i$; b) $\frac{5}{3}i$; c) $-\frac{1}{50}(36-23i)$; d) $\frac{11}{2}-i$; e) **0;**

f) $\frac{1}{318}(44-5i)$; g) $-2i$.

6.- $\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$ **y** $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$.

7.- $\begin{cases} x=-\frac{1}{7} \\ y=\frac{3}{7} \end{cases}$.

8.- $x=\pm 2$, $y=-2$.

9.- a) $z=-1-i$; b) $z=0+0i$, $z=-1$, $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

c) $z=0+0i$, $z=-1$, $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

10.- $z_1=1-i$, $z_2=0+i$.

11.- a) $\begin{cases} x=-\frac{1}{4}(2-3i) \\ y=\frac{1}{4}(2+11i) \end{cases}$; b) $\begin{cases} x=\frac{4}{3}(2-i) \\ y=-\frac{1}{3}(1-5i) \end{cases}$; c) $\begin{cases} x=\frac{8}{25}(3-i) \\ y=-\frac{1}{5}i \end{cases}$

13.- a) **4;** b) **1;** c) $\sqrt{33}$.

1.8 Potencia de un número de complejo

1.8.1 Potencia de la unidad imaginaria

Utilizando la igualdad $i^2 = -1$, se puede determinar fácilmente una potencia entera positiva cualquiera de la unidad imaginaria. Así tendremos:

$i^3 = i^2 i = -1i = -i$; $i^4 = i^2 i^2 = 1$; $i^5 = i^4 i = i$; $i^6 = i^4 i^2 = -1$; $i^7 = -i$; $i^8 = 1$, etc.

Esto demuestra que los valores de la potencia i^n, donde n es un número entero positivo, se repiten periódicamente al aumentar el exponente en 4. Por eso, para elevar el número i a una potencia entera positiva, hay que dividir el exponente por 4 y elevar i a la potencia cuyo índice es igual al resto de la división.

Ejemplo

Calcular

$$i^{17} + i^{18} + i^{19} + i^{20}$$

Solución

$$i^{17} + i^{18} + i^{19} + i^{20} = (i^2)^8 i + (i^2)^9 + (i^2)^9 i + (i^2)^{10}$$

$$= (-1)^8 i + (-1)^9 + (-1)^9 i + (-1)^{10}$$

$$= i - 1 - i + 1 = 0. \quad \nabla$$

1.8.2 Potenciación de un número complejo

La elevación de un número complejo a una potencia entera positiva se realiza por la regla de potenciación de un binomio, puesto que es un caso particular del producto de factores complejos iguales**.**

Ejemplo

Calcular $z^2 + \bar{z} = 0$

Solución

$$z^2 + \bar{z} = (a + bi)^2 + (a - bi) = a^2 + 2abi - b^2 + a - bi$$

$$= (a^2 - b^2 + a) + (2ab - b)i = 0 + 0i$$

De donde establecemos el sistema siguiente:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + a = 0 \\ 2ab - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + a = 0 \\ b(2a - 1) = 0 \end{cases}$$

Obtenemos dos sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + a = 0 \\ b = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} a^2 - b^2 + a = 0 \\ 2a - 1 = 0 \end{cases}.$$

Es muy fácil resolver estos sistemas:

$$\begin{cases} a_1 = 0, \quad a_2 = -1 \\ b_1 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} b_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad b_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ a_1 = \dfrac{1}{2} \end{cases}. \quad \nabla$$

1.8.3 Extracción de la raíz cuadrada de un numero complejo

Supongamos que se quiere extraer la raíz cuadrada del número $a + bi$. Quiere decir que debemos hallar un número complejo $x = yi$ tal que su cuadrado sea igual a $a + bi$. Tendremos que:

$$\sqrt{a+bi} = x + yi\ ,$$

donde x e y son números reales. En tal caso

$$a + bi = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

Utilizando la condición de igualdad de dos números complejos, obtendremos:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Resolvemos este sistema con respecto a las incógnitas x e y. De la segunda ecuación hallamos que $y = \dfrac{b}{2x}$. En tal caso,

$$x^2 - \frac{b^2}{4x^2} = a \quad \Rightarrow \quad 4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0$$

por lo tanto,

$$x^2 = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 + 4b^2}}{4} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Puesto que $\sqrt{a^2 + b^2} \geq a$, ante el radical hay que tomar el signo más para que x^2 sea un número positivo o cero; por lo tanto,

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Sustituimos este valor de x^2 en la ecuación $x^2 - y^2 = a$ y obtendremos:

$$y^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Los valores de x e y los hallamos de las igualdades

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}, \quad y^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}.$$

La ecuación $2xy = b$ demuestra que el producto xy tiene el mismo signo que el número b. Por lo tanto, si $b > 0$, x e y tienen signos iguales; si $b < 0$, x e y tienen diferentes signos. Por eso, para $b > 0$ tendremos:

$$\sqrt{a + bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}\right).$$

Para $b < 0$, tendremos:

$$\sqrt{a + bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}\right).$$

En la práctica estas fórmulas no se utilizan, sino se realiza el paso dado de los cálculos de x e y en cada caso por separado.

Ejemplo

Extraer la raíz cuadrada del número complejo $\sqrt{1 + 2i} = x + yi$.

Solución

$$\sqrt{1+2i} = x + yi \;\Rightarrow\; 1+2i = x^2 - y^2 + 2xyi \;\Rightarrow\; \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ xy = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - \dfrac{1}{x^2} = 1 \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 - x^2 - 1 = 0 \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}} \end{cases}.$$

Finalmente

$$\sqrt{1+2i} = \pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right). \quad \nabla$$

Ejemplo

Calcular $\sqrt{i} = x + yi$.

Solución

$$\sqrt{i} = x + yi \;\Rightarrow\; i = x^2 - y^2 + 2xyi \;\Rightarrow\; \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - \dfrac{1}{4x^2} = 0 \\ y = \dfrac{1}{2x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^4 - 1 = 0 \\ y = \dfrac{1}{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x^2 - 1)(2x^2 + 1) = 0 \\ y = \dfrac{1}{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Finalmente

$$\sqrt{i} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i). \quad \nabla$$

1.9 Ejercicios

1.- Simplificar las siguientes expresiones:

a) i^{345}

b) $i^{432} - i^{111}$

c) i^{-3}

d) $i^{-11} + i^{-12} + i^{-23}$

e) $3i^{23} + 8i^4 - 12i^{27} - 9i^{12}$

f) $i^{1007} - i^{234} + \dfrac{i^{7845}}{i^{1987}} - 2 + 2i$

g) $i^{23} + 8i^{34} - 12i^{27} - 9i^{12}$

h) $-\dfrac{2i^{23}}{3i^{17}} - \dfrac{i^{15}}{i^{27}} - 7i^{14}$.

2.- Simplifique las expresiones:

a) $\sqrt{5i}$

b) $\sqrt{-7i}$

c) $\sqrt{5-3i}$

d) $\sqrt{18-6i}$

e) $\sqrt{-2-5i}$

f) $\sqrt{-7+5i}$

g) $\sqrt[4]{-2}$

h) $\sqrt{7-5i}$

i) $\sqrt{7+5i}$

j) $\sqrt{3+2i}+\sqrt{3-2i}$

k) $\sqrt{2-i\sqrt{5}}$

l) $\sqrt{-7-5i}$.

3.- Resuelva la ecuación:

a) $z^2+3|z|=0$

b) $z^2+2|z|=1$

c) $z^2 + |z|^2 = 0$

d) $z^2 + z|z| + |z^2| = 0$.

4.- Determine $\left(\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n$**, donde *n* es un número entero.**

5.- Sea $z = -\frac{5}{2} + \frac{i\sqrt{5}}{2}$**. Calcular:**

a) $(1 + 2z + 3z^2)(1 + 2z^2 + 3z)$

b) $5(1 + 2z)(1 + 2z^2)$

c) $(z^2 + 2z)(2z^2 + z)$

d) $(1 + 2z + 3z^2)^3 + (1 + 2z^2 + 3z)^3$.

6.- Calcular:

a) $\left(1 - \frac{1+i}{2}\right)^{25}$

b) $\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)^{20}$

c) $\left(\frac{1 + i\sqrt{5}}{1 + i}\right)^{20}$

d) $\left(1+\frac{1-i}{2}\right)^{10}$

e) $\left(1+i+\frac{1-2i}{2}\right)^{25}$.

7.- Descomponer en pares de factores complejos:

a) a^2+9b^2

b) $4a^2+9b^2$

c) a^2+4b^2

d) $9a^2+18b^2$

e) $15a^2+12b^2$.

1.10 Respuestas

1.- a) ***i*;** b) **1 + *i*;** c) ***i*;** d) **1 + 2*i*;** e) **-1 + 9*i*;** f) **-2 + *i*;** g) **-17 + 11*i*;** h) $\frac{20}{3}$.

2.- a) $\frac{\sqrt{10}}{2}(1+i)$; b) $\frac{\sqrt{14}}{2}(1-i)$; c) $\sqrt{\frac{\sqrt{34}+5}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{34}-5}{2}}$; d) $\sqrt{3\sqrt{10}+9}-i\sqrt{3\sqrt{10}-9}$; e) $\sqrt{\frac{\sqrt{29}-2}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{29}+2}{2}}$; f)

$\sqrt{\frac{\sqrt{74}-7}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{74}+7}{2}}$; g) $\frac{\sqrt[4]{8}}{2}(1+i)$;h) $\sqrt{\frac{\sqrt{74}+7}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{74}-7}{2}}$; i) $\sqrt{\frac{\sqrt{74}+7}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{74}-7}{2}}$; j) $\sqrt{6+2\sqrt{13}}$; k) $\frac{1}{2}(\sqrt{10}-i\sqrt{2})$;

l) $\sqrt{\frac{\sqrt{74}-7}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{74}+7}{2}}$.

3.- a) $z=0+0i$, $z=0+3i$, $z=0-3i$; b) $z=0+i$, $z=0-i$, $z=\sqrt{2}-1+0i$, $z=1-\sqrt{2}+0i$; c) $z=0+0i$; d) $z=0+0i$.

4.- $(-1)^{\frac{n}{3}}2\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

5.- a) $-\frac{1}{4}(301+245\sqrt{5}\,i)$; b) $-95+155\sqrt{5}\,i$; c) $-\frac{45}{4}(3+\sqrt{5}\,i)$;

d) $-\frac{1}{8}(49924-7205\sqrt{5}\,i)$.

6.- a) $\frac{1}{8192}(1-i)$; b) $-\frac{1}{2^{10}}$; c) $31201+22420\sqrt{5}\,i$; d) $-\frac{1}{32}(3116-237i)$; e) $\left(\frac{3}{2}\right)^{25}$.

7.- a) $(a+3bi)(a-3bi)$; b) $(2a+3bi)(2a-3bi)$; c) $(a+2bi)(a-2bi)$; d) $(3a+3\sqrt{2}\,bi)(3a-3\sqrt{2}\,bi)$; e) $(\sqrt{15}\,a+2\sqrt{3}\,bi)(\sqrt{15}\,a-2\sqrt{3}\,bi)$.

1.11 Forma trigonométrica

A diferencia del módulo, el argumento del número complejo no se determina de forma unívoca. Cualesquiera dos argumentos de un número complejo se distinguen entre sí por un número múltiplo de 2π. Para designar el conjunto de todos los argumentos del número $z = a + bi$ se hace uso del símbolo Arg(z) o bien Arg(a + bi). Si se trata de cualquiera de los argumentos, éste, por regla, se designa con la letra φ.

El ángulo φ entre el sentido positivo del eje 0X y el vector 0P se llama argumento del número complejo $z = a + bi$. Este ángulo cuenta desde el eje 0X al vector 0P, lo que está indicado en el dibujo por una flecha. Si el número complejo es igual a cero, el vector 0P se convierte en un punto y no hay necesidad de hablar de su sentido. Por eso, se considera que el número complejo nulo no tiene argumento

1.11.1 Argumento

Recibe el nombre de argumento del número complejo $z \neq 0$ el ángulo entre el sentido positivo del eje real y el vector z, con la particularidad de que dicho ángulo se considera positivo si contamos en sentido antihorario y negativo, si contamos en sentido horario. Para el número $z = 0$ argumento no se determina.

Es evidente que cada número complejo, distinto de cero, tiene un conjunto infinito de valores del argumento; estos valores se diferencian entre sí en un número entero de vueltas completas, es decir, en la magnitud $2\pi k$, donde k es un número entero cualquiera. El valor del

argumento, tomado en los límites de la primera circunferencia, es decir, de 0 a 2π se llama principal.

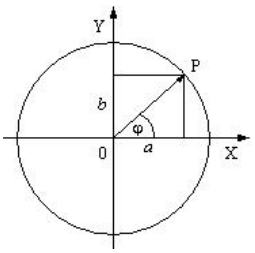


Figura 5. Argumento del número complejo.

Por la figura, tendremos:

$$\begin{cases} a = rCos\varphi \\ b = rSen\varphi \end{cases},$$

de donde

$$a + bi = rCos\varphi + irSen\varphi = r(Cos\varphi + iSen\varphi).$$

La expresión $r(Cos\varphi + iSen\varphi)$ se llama forma trigonométrica del número complejo, a diferencia de la forma $a + bi$ que se llama algebraica.

Para determinar el argumento φ utilizamos las fórmulas

$$\begin{cases} Cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ Sen\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}.$$

En función del signo de las partes real e imaginaria se toma el correspondiente cuadrante, en el que debe terminar el ángulo φ. Los

argumentos del número complejo $z = a + bi$ ($a \neq 0$) se pueden determinar de la ecuación

$$Tan\varphi = \frac{b}{a}.$$

Dos números complejos escritos en forma trigonométrica

$$z_1 = r_1(Cos\varphi_1 + iSen\varphi_1) \quad \text{y} \quad z^2 = r_2(Cos\varphi_2 + iSen\varphi_2)$$

son iguales si y sólo si

$$r_1 = r_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, \ k \in Z,$$

es decir, cuando los módulos de los números son iguales y los argumentos se diferencian en $2\pi k$, donde k es cierto número entero.

Ejemplo

Hallar los argumentos de los números complejos $z = -i$, $w = 1$, $u = -1 + i$.

Solución

Habiendo construido los vectores z, w, u hallamos uno de los argumentos de cada número:

$$\varphi_1 = -\pi/2, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = 3\pi/4.$$

Por consiguiente

$$\text{Arg}(z) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad \text{Arg}(w) = 2\pi k, \quad \text{Arg}(u) = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,$$

donde k es un número entero tomado al azar. ∇

Ejemplo

Hallar los argumentos del número complejo $z = -1 - \sqrt{3}i$.

Solución

En este caso a = - 1, $b = -\sqrt{3}$. El sistema tiene la forma

$$\begin{cases} Cos\varphi = -\dfrac{1}{2} \\ Sen\varphi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Resolviendo este sistema, hallamos

$$\varphi_k = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \mathrm{Z}.$$

Por lo tanto

$$\mathrm{Arg}(z) = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \mathrm{Z}. \ \nabla$$

1.11.2 Producto de números complejos de forma trigonométrica

Así, pues, el módulo del producto de dos números complejos es igual al producto de los módulos de dichos números, la suma de los argumentos de los factores es el argumento del producto

Multipliquemos los dos números complejos:

$$z_1 = r_1(Cos\varphi_1 + iSen\varphi_1) \quad \text{y} \quad z_2 = r_2(Cos\varphi_2 + iSen\varphi_2).$$

Obtendremos:

$$z_1z_2 = r_1(Cos\varphi_1 + iSen\varphi_1)r_2(Cos\varphi_2 + iSen\varphi_2)$$

$$= r_1r_2Cos\varphi_1Cos\varphi_2 + ir_1r_2Sen\varphi_1Cos\varphi_2 + ir_1r_2Cos\varphi_1Sen\varphi_2 - r_1r_2Sen\varphi_1Sen\varphi_2$$

$$= r_1r_2[Cos(\varphi_1 + \varphi_2) + iSen(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

El resultado nos muestra que el módulo del producto es igual al producto de los módulos de los factores, y el argumento del producto es igual a la suma de los argumentos de los factores. Por consiguiente,

$$|zw| = r_1r_2, \quad \text{Arg}(zw) = \varphi_1 + \varphi_2 + 2\pi k, \ k \in \text{Z}.$$

Ejemplo

Hallar el producto de los números

$$z = \sqrt{2}\left(Cos\frac{11\pi}{4} + iSen\frac{11\pi}{4}\right) \quad \text{y} \quad u = \sqrt{8}\left(Cos\frac{3\pi}{8} + iSen\frac{3\pi}{8}\right).$$

Solución

Como $|z| = \sqrt{2}$, $|u| = \sqrt{8}$, entonces $|zu| = 4$. El argumento del producto *zu* será la suma

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 11\pi/4 + 3\pi/8 = 25\pi/8.$$

Por consiguiente,

$$zu = 4\left(Cos\frac{25\pi}{8} + iSen\frac{25\pi}{8}\right) \Rightarrow zu = 4\left(Cos\frac{9\pi}{8} + iSen\frac{9\pi}{8}\right). \quad \nabla$$

1.11.3 Interpretación geométrica del producto de números complejos

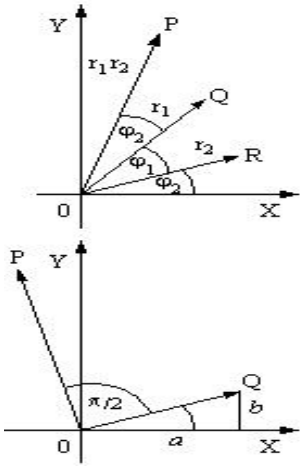


Figura 6. Interpretación geométrica del producto de números complejos.

En la figura, el vector 0Q corresponde al número complejo

$$z_1 = r_1(Cos\varphi_1 + iSen\varphi_1)$$

y el vector 0R, al número

$$z_2 = r_2(Cos\varphi_2 + iSen\varphi_2).$$

El vector 0P corresponde al producto

$$z_1z_2 = r_1r_2[Cos(\varphi_1 + \varphi_2) + iSen(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

El vector 0P se obtiene del vector 0Q girando el ángulo φ_2 y variando su longitud r_1, r_2 veces. Si $r_2 > 1$, se dice que el vector 0Q se dilata, y si $r_2 < 1$, se contrae. En el caso particular, cuando el número complejo z_1 se multiplica por i, el vector 0Q gira un ángulo recto $\pi/2$, conservando, en este caso, la longitud r_1 sin variación.

Ejemplo

Escriba los números complejos $z = -1 - i$, $u = -2$, $w = i$ en forma trigonométrica.

Solución

Como $|z| = \sqrt{2}$ y $\varphi_1 = -3\pi/4$, entonces

$$z = \sqrt{2}\left(Cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + iSen\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

El módulo de u es igual a 2, y uno de los argumentos de u es el ángulo $\varphi_2 = \pi$, por ello

$$u = 2(Cos\pi + iSen\pi).$$

Tomando en consideración que $|w| = 1$ y $\varphi_3 = \pi/2$ es uno de los argumentos de w, obtenemos

$$w = Cos\frac{\pi}{2} + iSen\frac{\pi}{2}. \quad \nabla$$

Ejemplo

Escriba los números

$$z = 2Cos\frac{7\pi}{4} - 2iSen\frac{\pi}{4} \quad \text{y} \quad u = -Cos\frac{\pi}{17} + iSen\frac{\pi}{17}$$

en forma trigonométrica.

Solución

Para escribir z y u en forma trigonométrica no hay necesidad de hallar previamente sus módulos y argumentos, aunque hacerlo no representa ninguna dificultad. Hagamos uso de que

$$Cos\frac{7\pi}{4} = Cos\left(-\frac{\pi}{4}\right),$$

en tanto que

$$-Sen\frac{\pi}{4} = Sen\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

y obtenemos de inmediato la forma trigonométrica del primer número

$$z = 2\left(Cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + iSen\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Por analogía, teniendo en cuenta que

$$-Cos\frac{\pi}{17} = Cos\left(\pi - \frac{\pi}{17}\right) = Cos\frac{16\pi}{17},$$

en tanto que

$$Sen\frac{\pi}{17} = Sen\left(\pi - \frac{\pi}{17}\right) = Sen\frac{16\pi}{17},$$

obtenemos

$$u = Cos\frac{16\pi}{17} + iSen\frac{16\pi}{17}. \quad \nabla$$

1.11.4 División de números complejos dados en forma trigonométrica

Hallamos el módulo y el argumento del cociente

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(Cos\varphi_1 + iSen\varphi_1)}{r_2(Cos\varphi_2 + iSen\varphi_2)}.$$

Multiplicando el numerador y el denominador del segundo miembro por $Cos\varphi_2 - iSen\varphi_2$; obtendremos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(Cos\varphi_1 + iSen\varphi_1)(Cos\varphi_2 - iSen\varphi_2)}{r_2(Cos\varphi_2 + iSen\varphi_2)(Cos\varphi_2 - iSen\varphi_2)}$$

$$= \frac{r_1(Cos\varphi_1 + iSen\varphi_1)(Cos\varphi_2 - iSen\varphi_2)}{r_2(Cos\varphi_2 + iSen\varphi_2)(Cos\varphi_2 - iSen\varphi_2)}$$

$$= \frac{r_1(Cos\varphi_1 + iSen\varphi_1)(Cos\varphi_2 - iSen\varphi_2)}{r_2(Cos^2\varphi_2 + Sen^2\varphi_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[Cos(\varphi_1 - \varphi_2) + iSen(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Por lo tanto, el módulo del cociente es igual al cociente de los módulos del dividendo y divisor, y el argumento del cociente, es igual a la diferencia de los argumentos del dividendo y del divisor.

Utilizando esta regla se puede demostrar que

$$(Cos\varphi + iSen\varphi)^{-1} = \frac{1}{Cos\varphi + iSen\varphi} = \frac{Cos0 + iSen0}{Cos\varphi + iSen\varphi}$$

$$= Cos(-\varphi) + iSen(-\varphi) = Cos\varphi - iSen\varphi\,.$$

Por consiguiente,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2}, \quad \text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \varphi_1 - \varphi_2 + 2\pi k\,,\ k \in \text{Z}.$$

Así, pues, el módulo del cociente de dos números complejos es igual al cociente de los módulos de dichos números, la diferencia de los argumentos del dividendo y el divisor es el argumento del cociente.

Ejemplo

Escriba en forma trigonométrica el número complejo

$$v = \frac{\left(Cos\frac{\pi}{3} - iSen\frac{\pi}{3}\right)\left(\sqrt{3} + i\right)}{i - 1}\,.$$

Solución

El número $z = Cos\frac{\pi}{3} - iSen\frac{\pi}{3}$ tiene módulo igual a 1 y argumento $\varphi_1 = -\frac{\pi}{3}$; el número $u = \sqrt{3} + i$ tiene módulo 2 y argumento $\varphi_2 = \frac{\pi}{6}$; el número $w = i - 1$ tiene módulo $\sqrt{2}$ y argumento $\varphi_3 = \frac{3\pi}{4}$. Por ello,

$$|v| = \frac{|z||u|}{|w|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

y el argumento

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{11\pi}{12}.$$

Por lo tanto,

$$v = \sqrt{2}\left(Cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right) + iSen\left(-\frac{11\pi}{12}\right)\right). \quad \nabla$$

1.11.5 Potenciación de un numero complejo dado en forma trigonométrica

Puesto que la *n*-ésima potencia, donde n es un número entero positivo, es el producto de *n* factores iguales, por la regla de la multiplicación de números complejos obtenemos

$$[r(Cos\varphi + iSen\varphi)]^n = r^n(Cosn\varphi + iSenn\varphi)$$

$$r^n(Cos\varphi + iSen\varphi)^n = r^n(Cosn\varphi + iSenn\varphi).$$

Después de la reducción, tendremos que:

$$(Cos\varphi + iSen\varphi)^n = Cosn\varphi + iSenn\varphi.$$

Esta forma se llama fórmula de Moivre. En particular, nos permite obtener el coseno y el seno de los arcos, múltiplos del dado.

Supongamos que $n = 2$, en tal caso

$$(Cos\varphi + iSen\varphi)^2 = Cos2\varphi + iSen2\varphi,$$

o bien,

$$Cos^2\varphi - Sen^2\varphi + 2iSen\varphi Cos\varphi = Cos2\varphi + iSen2\varphi,$$

de donde

$$Cos2\varphi = Cos^2\varphi - Sen^2\varphi \quad \text{y} \quad Sen2\varphi = 2Sen\varphi Cos\varphi.$$

Cuando $n = 3$, tendremos que:

$$(Cos\varphi + iSen\varphi)^3 = Cos3\varphi + iSen3\varphi,$$

o bien

$$Cos^3\varphi - 3Cos\varphi Sen^2\varphi + i(3Cos^2\varphi Sen\varphi - Sen^3\varphi) = Cos3\varphi + iSen3\varphi,$$

de donde

$$Cos3\varphi = Cos^3\varphi - 3Cos\varphi Sen^2\varphi,$$

o bien

$$Cos3\varphi = 4Cos^3\varphi - 3Cos\varphi \quad \text{y} \quad Sen3\varphi = 3Cos^2\varphi Sen\varphi - Sen^3\varphi,$$

o también

$$Sen3\varphi = 3Sen\varphi - 4Sen^3\varphi.$$

Si ambos miembros de la última igualdad del párrafo anterior los elevamos a la potencia *n*, obtendremos:

$$[(Cos\varphi + iSen\varphi)^{-1}]^n = [Cos(-\varphi) + iSen(-\varphi)]^n,$$

o bien

$$(Cos\varphi + iSen\varphi)^n = Cos(-n\varphi) + i\text{Sen}(-n\varphi),$$

La última igualdad muestra que

$$(Cos\varphi + iSen\varphi)^n = Cosn\varphi + iSenn\varphi,$$

se cumple también para los exponentes enteros negativos.

Ejemplo

Eleve a la novena potencia el número complejo $z = \sqrt{3} - i$.

Solución

El módulo de *z* es igual a 2 y uno de los argumentos es el ángulo $\varphi = -\pi/6$, por lo que el módulo del número z^9 es igual a 2^9 y el argumento del número *z*, a $9\varphi = -3\pi/2$. Por lo tanto,

$$\left(\sqrt{3} - i\right)^9 = 2^9\left(Cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + iSen\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right) = 512i. \quad \nabla$$

1.11.6 Radicación de números complejos dados en forma trigonométrica

Supongamos que se quiere extraer la raíz n-ésima del número complejo $z = r(Cos\varphi + iSen\varphi)$. Esto significa que se debe hallar un número complejo $z = \rho(Cos\theta + iSen\theta)$, que elevado a la n-ésima potencia nos dé el numero z, es decir,

$$[\rho(Cos\theta + iSen\theta)]^n = r(Cos\varphi + iSen\varphi),$$

o bien

$$\rho^n(Cosn\theta + iSennn\theta) = r(Cos\varphi + iSen\varphi).$$

Basándonos en la condición de igualdad de dos números complejos deducimos que sus módulos deben ser iguales, y los argumentos se pueden diferenciar en un número múltiplo de 2π, es decir, $r = \rho^n$; $n\theta = \varphi + 2\pi k$, donde k es un número entero, de donde obtenemos:

$$\rho = \sqrt[n]{r}\ ; \quad \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}\ .$$

De este modo, el resultado de la radicación se presenta de la siguiente forma:

$$z = \sqrt[n]{r(Cos\varphi + iSen\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(Cos\,\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + iSen\,\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

donde $\sqrt[n]{r}$ es el valor aritmético de la raíz.

Si en esta fórmula damos al número k los valores 0, 1, 2, 3, ..., n-1, obtendremos los siguientes n valores de la raíz:

$$\text{Si} \quad k = 0, \quad z_0 = \sqrt[n]{r}\left(Cos\,\frac{\varphi}{n} + iSen\,\frac{\varphi}{n} \right);$$

$$\text{Si} \quad k = 1, \quad z_1 = \sqrt[n]{r}\left(Cos\,\frac{\varphi + 2\pi}{n} + iSen\,\frac{\varphi + 2\pi}{n} \right);$$

$$\text{Si} \quad k = 2, \quad z_2 = \sqrt[n]{r}\left(Cos\,\frac{\varphi + 4\pi}{n} + iSen\,\frac{\varphi + 4\pi}{n} \right);$$

$$\text{Si} \quad k = n - 1, \quad z_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left(Cos\,\frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n} + iSen\,\frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n} \right).$$

Los argumentos de estos valores de la raíz, es decir, los ángulos

$$\frac{\varphi}{n}: \quad \frac{\varphi + 2\pi}{n}; \quad \frac{\varphi + 4\pi}{n}; \quad ...; \quad \frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n},$$

van en orden creciente; se comprueba fácilmente que cada uno de ellos es menor que un ángulo completo, o bien 2π. Para ello es suficiente demostrar que el mayor de ellos

$$\frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n} < 2\pi\,.$$

En realidad, el valor principal del argumento de un número complejo es menor que un ángulo completo: $0 \le \varphi < 2\pi$, y por eso,

$$\frac{\varphi + 2(-n)\pi}{n} < \frac{2\pi + 2(n-1)\pi}{n} = 2\pi\,; \quad \frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n} < 2\pi\,.$$

De la trigonometría se sabe que en los límites de una circunferencia dos ángulos distintos no pueden tener simultáneamente valores iguales del seno y valores idénticos del coseno; por lo tanto, todos los n valores de la raíz serán distintos. Con el aumento ulterior del número k ($k = n$, n+1, n+2, ...), ya no se obtienen nuevos valores de la raíz; por ejemplo, para $k = n$ tendremos:

$$z_n = \sqrt[n]{r}\left(Cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + iSen\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$$

$$= \sqrt[n]{r}\left[Cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi \right) + iSen\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi \right) \right]$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(Cos\frac{\varphi}{n} + iSen\frac{\varphi}{n} \right) = z_0 .$$

Se ha obtenido el mismo valor que para $k = 0$. Si $k = n + 1$, obtenemos z_1, para $k = n + 2$, obtenemos z_2, etc.

Ejemplo

Representar $\sqrt{i}$ en forma trigonométrica.

Solución

Representemos i en forma trigonométrica:

$$i = Cos\frac{\pi}{2} + iSen\frac{\pi}{2};$$

entonces:

$$\sqrt{i} = \sqrt{Cos\frac{\pi}{2} + iSen\frac{\pi}{2}} = Cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2} + iSen\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2}.$$

Para $k = 0$, obtendremos:

$$\sqrt{i} = Cos\frac{\pi}{4} + iSen\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

Para $k = 1$, obtendremos:

$$\sqrt{i} = Cos\frac{5\pi}{4} + iSen\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i). \quad \nabla$$

Ejemplo

Representar $z = \sqrt[4]{-1}$ en forma trigonométrica.

Solución

Tenemos que:

$$-1 = Cos\pi + iSen\pi.$$

Luego

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{Cos\pi + iSen\pi} = Cos\,\frac{\pi + 2\pi k}{4} + iSen\,\frac{\pi + 2\pi k}{4};$$

para $k = 0$, obtendremos:

$$z_1 = Cos\frac{\pi}{4} + iSen\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i);$$

para $k = 1$, obtendremos:

$$z_2 = Cos\frac{3\pi}{4} + iSen\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1);$$

para $k = 2$, obtendremos:

$$z_3 = Cos\frac{5\pi}{4} + iSen\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i);$$

para $k = 3$, obtendremos:

$$z_4 = Cos\frac{7\pi}{4} + iSen\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i). \quad \nabla$$

Ejemplo

Hallar todos los valores de $\sqrt[4]{-16}$.

Solución

Escribamos el número $z = -16$ en forma trigonométrica

$$z = -16 = 16(Cos\pi + iSen\pi).$$

De acuerdo con la fórmula general, obtenemos

$$w_k = 2\left(Cos\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2\pi k}{4}\right) + iSen\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{4}\right)\right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Por consiguiente

$$w_0 = 2\left(Cos\frac{\pi}{4} + iSen\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2};$$

$$w_1 = 2\left(Cos\frac{3\pi}{4} + iSen\frac{3\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}\,;$$

$$w_2 = 2\left(Cos\frac{5\pi}{4} + iSen\frac{5\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}\,;$$

$$w_3 = 2\left(Cos\frac{7\pi}{4} + iSen\frac{7\pi}{4} \right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}\,.$$

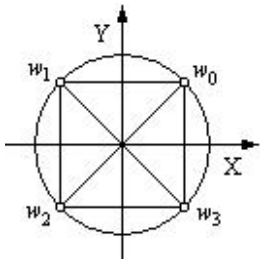


Figura 7. Puntos correspondientes a los números w0, w1, w2, w3.

En la figura están representados los cuatro valores de $\sqrt[4]{-16}$. Los puntos correspondientes a los números w_0, w_1, w_2, w_3 se hallan en los vértices de un cuadrado inscrito en la circunferencia de radio R = 2 con centro en el punto $z = 0$. ∇

1.12 Ejercicios

1.- Expresar los siguientes números en forma trigonométrica:

a) $1 - i\sqrt{3}$

b) $-1 + i\sqrt{3}$

c) $-1 - i\sqrt{3}$

d) $\sqrt{3}-i$.

2.- Determine los argumentos del número complejo:

a) $z = Sen\frac{\pi}{9} - iCos\frac{\pi}{9}$

b) $z = -1$

c) $z = 8$

d) $z = 2 - 2i$

e) $z = 1 + Cos\frac{\pi}{7} + iSen\frac{\pi}{7}$.

3.- Hallar los argumentos del número complejo:

a) $z = Sen\frac{\pi}{9} + iCos\frac{\pi}{9}$

b) $z = 1 + Cos\frac{\pi}{7} - iSen\frac{\pi}{7}$.

4.- Determine el módulo del número complejo

$$z = 1 + Cos\frac{8\pi}{7} + iSen\frac{8\pi}{7}.$$

5.- Expresar en la forma $a + bi$:

a) $5\left[Cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\ Sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$

b) $4\left(Cos\,180^{\circ}+i\ Sen\,180^{\circ}\right)$

c) $2\left(Cos\,315^{\circ}+i\ Sen\,315^{\circ}\right)$

d) $3\left[Cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\ Sen\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$.

6.- Hallar los argumentos del número complejo $z=-\sqrt{3}+i$ **.**

7.- Extraer las raíces:

a) $\sqrt[5]{i}$

b) $\sqrt[3]{3+3i}$

c) $\sqrt{3-3i}$

d) $\sqrt[3]{-5}$ **.**

8.- Represente el número complejo *z* en forma trigonométrica:

a) $z=-\sqrt{3}+i$

b) $z=-Cos\frac{\pi}{12}-iSen\frac{\pi}{12}$

c) $z=1+Cos\frac{10\pi}{9}+iSen\frac{10\pi}{9}$

d) $z = Tan1 - i$.

9.- Escriba el número complejo *z* en la forma trigonométrica:

a) $$z = \frac{i\left[Cos\frac{5\pi}{3} + iSen\frac{5\pi}{3} \right]}{Cos\frac{\pi}{6} + iSen\frac{\pi}{6}}$$

b) $$z = \frac{1}{Cos\frac{4\pi}{3} - iSen\frac{4\pi}{3}}$$

c) $$z = \frac{\left[Cos\frac{\pi}{3} - iSen\frac{\pi}{3} \right]\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right]}{i}$$

d) $$z = \frac{-Cos\frac{5\pi}{12} + iSen\frac{5\pi}{12}}{Cos\frac{13\pi}{12} - iSen\frac{13\pi}{12}}$$

e) $$z = \frac{5i\left[Cos100° + iSen100° \right]}{3\left[Cos40° - iSen40° \right]}.$$

10.- Escriba el número complejo *z* en forma trigonométrica:

a) $$z = \left(Sen\frac{6\pi}{5} + i\left(1 + Cos\frac{6\pi}{5} \right) \right)^5$$

b) $$z = \frac{(1+i)^{2n+1}}{(1-i)^{2n-1}}$$

c) $z = \left(\dfrac{\sqrt{3}\, i + 1}{i - 1} \right)^6$.

11.- Calcular:

a) $\dfrac{(1 + i\sqrt{2})(Cos\varphi - iSen\varphi)}{(1 - i\sqrt{2})(Cos\varphi + iSen\varphi)}$

b) $\dfrac{1 + iTanx}{1 - iTanx}$.

12.- Hallar todos los valores de $\sqrt[n]{z}$ si:

a) $z = 8i,\ n = 3$

b) $z = 1 + i,\ n = 8.$

1.13 Respuestas

1.- a) $2\left(Cos\dfrac{\pi}{3} - iSen\dfrac{\pi}{3} \right)$; b) $2\left(Cos\dfrac{4\pi}{3} - iSen\dfrac{4\pi}{3} \right)$; c) $2\left(Cos\dfrac{4\pi}{3} + iSen\dfrac{4\pi}{3} \right)$; d) $2\left(Cos\dfrac{\pi}{6} - iSen\dfrac{\pi}{6} \right)$.

2.- a) $\dfrac{11\pi}{18} - k\pi$; b) $k\pi$; c) $k\pi$; d) $\dfrac{3\pi}{4} - k\pi$; e) $\dfrac{15\pi}{14} - k\pi$

3.- a) $\dfrac{25\pi}{18} - k\pi$; b) $\dfrac{13\pi}{14} - k\pi$.

4.- $2Sen\dfrac{\pi}{14}$.

5.- a) **-5*i*;** b) **4.-** c) $\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$; d) $-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

6.- $\mathrm{Arg}(z)=-\frac{\pi}{6}+\pi(2n+1)=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n \in Z$.

7.- a) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{8}+\frac{5}{8}}+\left(\frac{\sqrt{5}}{4}-\frac{1}{4}\right)i$; b) $\frac{\sqrt[3]{12}}{4}[\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)i]$; c) $\sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{2}}-i\sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{2}}$; d) $\frac{\sqrt[3]{5}}{2}+\frac{\sqrt[6]{675}}{2}i$.

8.- a) $2\left(Cos\frac{\pi}{6}-iSen\frac{\pi}{6}\right)$; b) $Cos\frac{\pi}{12}+iSen\frac{\pi}{12}$; c) $2Sen\frac{\pi}{18}\left(Cos\frac{5\pi}{9}+iSen\frac{5\pi}{9}\right)$; d) $Sec1\left(Cos\frac{\pi+2}{2}+iSen\frac{\pi+2}{2}\right)$.

9.- a) $Cos\pi+iSen\pi$; b) $Cos\frac{\pi}{3}+iSen\frac{\pi}{3}$; c) $Cos\frac{3\pi}{4}+iSen\frac{3\pi}{4}$; d) $Cos\frac{2\pi}{3}+iSen\frac{2\pi}{3}$; e) $\frac{5}{3}\left(Cos\frac{5\pi}{18}+iSen\frac{5\pi}{18}\right)$.

10.- a) $\frac{5\sqrt{5}-11}{2}\left(Cos\frac{\pi}{2}+iSen\frac{\pi}{2}\right)$;

b) $\begin{cases} 2\left(Cos\left(\frac{\pi}{4}+A\tan\frac{1}{3}\right)+iSen\left(\frac{\pi}{4}+A\tan\frac{1}{3}\right)\right), & n\ es\ par \\ 2\left(Cos\left(\frac{3\pi}{4}-A\tan\frac{1}{3}\right)+iSen\left(\frac{3\pi}{4}-A\tan\frac{1}{3}\right)\right), & n\ es\ impar \end{cases}$; c) $8\left(Cos\frac{\pi}{2}+iSen\frac{\pi}{2}\right)$.

11.- a) $(2\sqrt{2}Sen2x - Cos2x) + i(2\sqrt{2}Cos2x + Sen2x)$**;** b) $Cos2x + iSen2x$**.** **12.-** a) $\sqrt{3} + i$**;** b) $(-1)^{\frac{1}{32}} \cdot 2^{\frac{1}{8}}$**.**

1.14 Forma exponencial de un numero complejo

En las diferentes partes de la moderna matemática, así como en sus aplicaciones, se utiliza la forma exponencial del número complejo, basada en la fórmula de Euler, que relaciona las funciones trigonométricas del argumento real con la función exponencial del argumento imaginario.

Exponemos la primera fórmula de Euler sin deducción:

$$e^{\varphi i} = Cos\varphi + iSen\varphi,$$

donde el número *e*, tomado como base de los logaritmos naturales, es irracional; este número es tan importante como el número π.

Si en la fórmula $z = r(Cos\varphi + iSen\varphi)$ sustituimos la expresión $Cos\varphi + iSen\varphi$ por $e^{\varphi i}$, obtendremos $z = re^{\varphi i}$. Precisamente ésta es la forma exponencial del número complejo *z*.

En esta notación *r* es el módulo del número complejo, φ es el argumento del número complejo *z*. Sustituyendo en la fórmula de Euler φ por -φ, obtendremos la segunda fórmula de Euler

$$e^{-\varphi i} = Cos(-\varphi) + iSen(-\varphi)$$

o bien

$$e^{-\varphi i} = Cos\varphi - iSen\varphi.$$

De las fórmulas de Euler

$$\begin{cases} e^{\varphi i} = Cos\varphi + iSen\varphi \\ e^{-\varphi i} = Cos\varphi - iSen\varphi \end{cases}$$

Se pueden obtener importantes resultados.

Sumando miembro a miembro estas igualdades, obtenemos:

$$e^{\varphi i} + e^{-\varphi i} = 2Cos\varphi,$$

de donde

$$Cos\varphi = \frac{e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}}{2} \quad (1)$$

Restando miembro a miembro de la igualdad (1) la (2), tendremos:

$$Sen\varphi = \frac{e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}}{2} \quad (2)$$

Las igualdades (1) y (2) se llaman también fórmulas de Euler; ellas expresan las funciones trigonométricas del argumento real φ por las funciones exponenciales del argumento imaginario.

Las fórmulas (1) y (2) se cumplen también cuando φ se sustituye por un número complejo *z* cualquiera; esta sustitución nos da:

$$Cosz = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} \quad (3)$$

$$Senz = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2} \quad (4)$$

las igualdades (3) y (4) se toman como definición del seno y del coseno del argumento complejo.

Demostremos que las funciones trigonométricas de argumento complejo también son periódicas, de periodo $p = 2\pi$. En efecto,

$$Cos(z + 2\pi) = \frac{e^{(z+2\pi)i} + e^{-(z+2\pi)i}}{2} = \frac{e^{zi}e^{2\pi i} + e^{-zi}e^{2\pi i}}{2} = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} = Cosz$$

puesto que por las fórmulas de Euler

$$e^{2\pi i} = Cos2\pi + iSen2\pi = 1 \quad \text{y} \quad e^{-2\pi i} = Cos2\pi - iSen2\pi = 1.$$

La periodicidad de la función exponencial de argumento complejo se revela fácilmente; su periodo es $p = 2\pi i$. En efecto,

$$e^{z+2\pi i} = e^{z}e^{2\pi i} = e^{z} \cdot 1 = e^{z}.$$

Se observa que todas las fórmulas de la trigonometría ordinaria son válidas en el campo complejo.

Ejemplo

Representar en forma exponencial el número complejo $z = 3 + 4i$.

Solución

El modulo

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Hallamos el argumento φ. Puesto que Tanφ = 4/3, tendremos que

$$\varphi = \text{ArcTan}4/3 \approx 0.93 \quad \Rightarrow \quad 3 + 4i = 5e^{0,93i}. \quad \nabla$$

Ejemplo

Representar en forma exponencial el número complejo $z = \sqrt{3} - i$.

Solución

Hallamos el módulo: $|z| = \sqrt{3+1} = 2$.

El argumento φ lo hallamos de la correlación $Tan\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Por lo tanto,

$$\varphi = -\frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3} - i = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}. \quad \nabla$$

Ejemplo

Calcular e^{2+i}.

Solución

Tenemos que

$$e^{2+i} = e^2 e^i = e^2(\text{Cos}1 + i\text{Sen}1) = e^2(0,540 + 0,842i)$$

$$= 7,39(0,540 + 0,842i) \approx 3,99 + 6,22i. \quad \nabla$$

Ejemplo

Calcular *Cosi* y *Seni*.

Solución

Poniendo en la igualdad (3) $z = i$, obtendremos:

$$Cosi = \frac{e^{i\cdot i} + e^{-i\cdot i}}{2} = \frac{e^{-1} + e^{1}}{2}.$$

Resultó que Cos*i* es un número real, mayor que 1, lo que no nos debe extrañar. Calculemos Sen*i*:

$$Seni = \frac{e^{-1} - e^{1}}{2i} = \frac{i(e^{-1} - e^{1})}{-2}.$$

En consecuencia, *Seni* es un número imaginario. ∇

Ejemplo

Represente en forma exponencial el número complejo:

a) $z = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{i}{8}$; b) $z = \frac{(-\sqrt{3} + i)\left(Cos\frac{\pi}{12} - iSen\frac{\pi}{12}\right)}{1 - i}$; c) $z = (-1 + i)^5$.

Solución

a) Hallamos el módulo del número

$$|z| = \sqrt{\frac{3}{64} + \frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$$

y uno de sus argumentos

$$Tan\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{6}$$

Ya que z se encuentra en el cuarto cuadrante. Por consiguiente,

$$z = \frac{1}{4} e^{-\frac{\pi i}{6}}.$$

b) Representemos cada uno de los números

$$-\sqrt{3} + i, \quad Cos\frac{\pi}{12} - iSen\frac{\pi}{12}, \quad 1 - i$$

en forma exponencial

$$-\sqrt{3} + i = 2e^{\frac{5\pi i}{6}}; \quad Cos\frac{\pi}{12} - iSen\frac{\pi}{12} = Cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + iSen\left(-\frac{\pi}{12}\right) = e^{-\frac{\pi i}{12}};$$

$$1 - i = \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi i}{4}}.$$

Empleando las fórmulas (3) y (4), obtenemos

$$z = \frac{2e^{\frac{5\pi i}{6}} e^{-\frac{\pi i}{12}}}{\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi i}{4}}} = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\, e^{i\pi}.$$

c) Escribamos en forma exponencial la base de la potencia y apliquemos la fórmula correspondiente:

$$(-1+i)^5 = \left(\sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi i}{4}}\right)^5 = 4\sqrt{2}\, e^{\frac{15\pi i}{4}} = 4\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi i}{4}}. \quad \nabla$$

1.15 Ejercicios

1.- Escriba en las formas exponencial y algebraica el número complejo *z*:

a) $z = e^{2-i}$

b) $z = e^{-\frac{3\pi i}{2}+12\pi i}$

c) $z = 5e^{\frac{\pi i}{4}}\, 0{,}2e^{\frac{\pi i}{6}}\left(Cos\frac{5\pi}{12} - iSen\frac{5\pi}{12}\right)$

d) $z = \dfrac{e^{-\frac{\pi i}{3}}\left(1+i\sqrt{3}\right)^7}{i}$;

e) $z = -Cos\,\dfrac{\pi}{7} + iSen\,\dfrac{\pi}{7}$

f) $z = \dfrac{1}{(Cos12° + iSen12°)^5}$

g) $z = \left(\dfrac{1}{2}e^{\frac{\pi i}{12}}\right)^{-3}$

h) $z = -\sqrt{12} - 2i$;

i) $z = e^{3i+7+3\pi i-\frac{\pi i}{2}}$.

2.- Empleando la fórmula $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)i}$ escriba en forma exponencial todos los valores de $\sqrt[n]{z}$:

a) $z = 1,\ n = 3$

b) $z = -4 + i\sqrt{48}$, $n = 3$

c) $z = -1 - i\sqrt{3}$, $n = 4$.

3.- Sea $z = x + iy$; hallar el módulo y los argumentos del número e^z.

4.- Escriba todos los valores de la raíz $\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}$ en forma exponencial.

1.16 Respuestas

1.- a) $e^2 e^{-i}$, $3.99 - 6.22i$; b) $e^{\frac{\pi}{4}i}$, i; c) e^{0i}, **1**; d) $128e^{\frac{\pi}{4}i}$, **$-128i$**; e) $-e^{\frac{\pi}{7}i}$, **$-0.9 + 0.43i$**; f) $e^{\frac{2\pi}{3}i}$, $\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$; g) $8e^{\frac{3\pi}{4}i}$, $4\sqrt{2}(1-i)$; h) $4e^{\frac{\pi}{6}i}$, $-2(\sqrt{3}+i)$; i) $e^7 e^{\frac{\pi+6}{2}i}$.

2.- a) $e^{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}\right)i}$; b) $2e^{\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}\right)i}$; c) $\sqrt[4]{2}\, e^{\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}\right)i}$.

3.- e^x, $y + 2\pi k$.

4.- $\sqrt[4]{\sqrt{3}+i} = \sqrt[4]{2e^{\frac{\pi i}{6}}} = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{\pi i(12k+1)}{24}}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

CAPÍTULO II

2 ALGEBRA LINEAL

DESTREZAS CON CRITERIO DE DESEMPEÑO

ONCDM.5.2.1 Analizar e identificar los diferentes tipos de matrices a partir de su definición.

ONCDM.5.2.2. Calcular la matriz escalonada mediante la reducción de filas utilizando operaciones básicas.

ONCDM.5.2.3. Determinar la inversa de una matriz de orden 4x4 o más utilizando de las propiedades básicas de las operaciones elementales de fila .

ONCDM.5.2.4. Resolver sistemas de ecuaciones lineales utilizando matrices de orden 4x4 o más, a partir de las operaciones básicas de fila o mediante las propiedades de los determinantes

2.1 Matrices y determinantes

Las matrices se escribirán mediante un solo símbolo, que por lo común serán letras mayúsculas como A, B, C, D, etc. Cuando no se utilicen números específicos para designar los elementos de una matriz, se utilizarán minúsculas de la forma a_{ij}. No existen restricciones sobre el número de filas o columnas que una matriz puede tener.

2.2 Matriz

Una matriz es una ordenación rectangular de elementos distribuidos en *n* filas (horizontales) y *m* columnas (verticales), el elemento que está en la *i*-ésima fila y en la *j*-ésima columna se denota por a_{ij}, siendo este elemento, un número real o complejo. Formalmente lo denotamos como A = (a_{ij}). (Anton & Rorres, 2014; Bretscher, 2013; Lay et al., 2016).

Ejemplos de matrices son los siguientes:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ -5 & -6 & 2\end{pmatrix};\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 7 & 4\\ 2 & 9\end{pmatrix};\quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}8 & 7 & 5\\ 3 & 0 & -2\\ 4 & 7 & 1\end{pmatrix}.$$

Una matriz con *n* filas y *m* columnas se llama matriz de *n* x *m*; la expresión *n* x *m* es su orden o forma.

Si *n* = *m* la matriz se denomina cuadrada y se dice que tiene orden *n***.**

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm}\end{pmatrix}.$$

Si una matriz tiene una sola fila, se le llama matriz fila y se la representa por

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im}\end{pmatrix}.$$

Si una matriz tiene una sola columna, se le llama matriz columna y se representa por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}.$$

En particular, un elemento a_{ij} puede considerarse como una matriz de una fila y una columna.

Matrices de este tipo son las siguientes:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 2 \\ 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 9 \end{pmatrix},$$

siendo A una matriz de 3 x 3, B de 3 x 1 y C de 1 x 3**.**

2.3 Matriz nula

Una matriz de cualquier orden, que tiene todos sus elementos nulos, se denomina matriz nula y se denota por O.

Matrices de este tipo son:

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{etc.}$$

2.4 Matriz cuadrada

Una matriz cuadrada que tiene el número 1 como elementos de la diagonal principal, y los demás elementos son ceros, se denomina matriz identidad

y se denota como I = (δ_{ij}), donde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad i = j \\ 0, & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$, δ se denomina delta de Kronecker.

Matrices de este tipo se dan a continuación:

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{etc.}$$

2.5 Matriz escalar

Una matriz cuadrada que tiene el número *a* diferente de cero, como elementos de la diagonal principal, y los demás elementos son ceros, se denomina matriz escalar y se denota como E = *a*I.

Este tipo de matrices tienen la siguiente forma:

$$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a\mathbf{I}; \quad \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} a+b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix} = (a+b)\mathbf{I}; \quad \text{etc.}$$

Dadas A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), matrices de igual orden. Las matrices A y B se dice son iguales si y sólo si los elementos correspondientes a cada una de estas son iguales.

De manera más compacta, se escribe A = B si $a_{ij} = b_{ij}$, para todo $i, j \in$ N.

Ejemplo

Determine los valores de a, b y c para que las matrices dadas sean iguales

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 6\end{pmatrix} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}a+2b+c & 2a-c\\ a+1 & a+2b\end{pmatrix}.$$

Solución

Para que A y B sean iguales se debe cumplir por definición que sus correspondientes elementos sean iguales, es decir:

$$\begin{cases} a+2b+c=2\\ 2a-c=4\\ a+1=1\\ a+2b=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2b+c=2\\ 2a-c=4\\ a=0\\ a+2b=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0\\ b=3\\ c=-4 \end{cases}. \quad \nabla$$

2.6 Suma de matrices

Si a cada par de matrices de orden n x m le hacemos corresponder otra matriz del mismo orden cuyos elementos se obtienen sumando término a término los correspondientes a dichas matrices, se denomina adición de matrices. De aquí que el orden de la matriz suma es la misma que la de los sumandos

Dadas A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) y C = (c_{ij}), matrices de igual orden. Si se cumple que

$$\mathrm{C} = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = (c_{ij}), \quad i,j \in \mathrm{N}$$

a la matriz C se le denomina adición de A y B.

Ejemplo

Dadas las matrices

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 2 & 6 & -2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -1\\ 4 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -4\end{pmatrix}$$

Determine A + B**.**

Solución

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 2 & 6 & -2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & 2 & -1\\ 4 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1-3 & -3+2 & 4-1\\ 2+4 & 6-1 & -2+2\\ 3+3 & 2+1 & 1-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 3\\ 6 & 5 & 0\\ 6 & 3 & -3\end{pmatrix}. \quad \nabla$$

Ejemplo

Un fabricante de sacos los produce en color negro, azul y rojo para hombres, mujeres y niños. La capacidad de producción en miles en la planta A está dada por la matriz

	Hombres	Mujeres	Niños
Negro	3	5	6
Azul	2	3	4
Rojo	5	1	3

La producción en la planta B está dada por

	Hombres	Mujeres	Niños
Negro	2	3	3
Azul	4	2	5
Rojo	1	3	2

Determine la representación matricial de la producción total de cada tipo de sacos en ambas plantas.

Solución

Para obtener la matriz de producción total, sumamos las matrices que relacionan las plantas A y B:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 9 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}. \quad \nabla$$

Propiedades

La adición de matrices, cumple con las siguientes propiedades:

1 Sean las matrices A = (a_{ij}), O = (o_{ij}) de igual orden, entonces

$$A + O = O + A = A.$$

2 Si A = (a_{ij}) y B = (b_{ij}) son matrices de igual orden, entonces la adición de matrices es conmutativa, es decir, A + B = B + A.

3 Si A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij}) son matrices de igual orden, entonces la adición de matrices es asociativa, es decir, A + (B + C) = (A + B) + C.

2.7 Producto escalar

Dada A = (a_{ij}) una matriz arbitraria y a un escalar. El producto del escalar a y la matriz A se define como la matriz C = (c_{ij}) del mismo orden que A, cuyos elementos se obtienen multiplicando el escalar por cada uno de los elementos de A.

Ejemplo

Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} \quad \boldsymbol{a} = \mathbf{6}.$$

Determine aA**.**

Solución

$$a\mathbf{A} = 6\begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -18 & -12 \\ 30 & -24 & 12 \end{pmatrix}. \quad \nabla$$

Ejemplo

El costo en dólares de comprar un boleto aéreo de la ciudad A a cada una de las cuatro ciudades B, C, D y E, está relacionado en la matriz P = (75 62 35 55). Si la directiva de la aviación civil aprueba un incremento del 12% en las tarifas. Hallar las nuevas tarifas.

Solución

Las nuevas tarifas se obtienen multiplicando la matriz P por 1.12, es decir;

$$1.12\mathbf{P} = 1.12\begin{pmatrix}75 & 62 & 35 & 55\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}84 & 69{,}44 & 39{,}2 & 61{,}6\end{pmatrix}. \quad \nabla$$

El producto de un escalar por una, cumple con las siguientes propiedades:

4 Sea A = (a_{ij}) una matriz arbitraria y a un número, entonces aA = Aa.

5 Si A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) son matrices de igual orden y a un número, entonces se cumple la ley distributiva respecto a la adición de matricial, es decir,

$$a(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = a\mathrm{A} + a\mathrm{B}.$$

6 Si A = (a_{ij}) es una matriz arbitraria y a, b números, entonces se cumple la ley distributiva con respecto a la adición de escalares, es decir,

$$(a + b)\mathrm{A} = a\mathrm{A} + b\mathrm{A}.$$

La matriz opuesta de A puede obtenerse multiplicando la matriz original por el escalar –1. De acuerdo con esta definición; B = (-1)A, notándose B = -A.

2.8 Resta de matrices

Una matriz B = (b_{ij}) que, dada una matriz A = (a_{ij}) cumple la ecuación matricial

(o_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij}), para todo $i, j \in$ N recibe el nombre de matriz opuesta o negativa de A.

La operación de restar una matriz B de una matriz A se define exactamente como esperará el lector: A – B es la matriz cuyos elementos

son $a_{ij} - b_{ij}$. Se observa también que la resta puede definirse en términos de operaciones ya definidas, como A – B = A + (-B). Es decir, para restar dos matrices, restamos sus correspondientes elementos.

Dadas A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) y C = (c_{ij}), matrices de igual orden. Si se cumple que

C = A - B = (a_{ij}) - (b_{ij}) = $(a_{ij} - b_{ij})$ = (c_{ij}), $i, j \in$ N a la matriz C se le denomina resta de A y B.

Ejemplo

Dadas las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 13 & 5 & 12 \\ 17 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -6 & 11 & 3 \\ 15 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine la matriz M tal que A - 2M = 3B.

Solución

Como A – 2M = 3B, entonces:

$$2M = A - 3B \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - 3\mathbf{B})$$

Reemplazando los datos conocidos, obtenemos:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 13 & 5 & 12 \\ 17 & 6 & 8 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -6 & 11 & 3 \\ 15 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 13 & 5 & 12 \\ 17 & 6 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -18 & 33 & 9 \\ 45 & 6 & 3 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 31 & -28 & 3 \\ -28 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \quad \nabla$$

Ejemplo

Tres máquinas de gaseosas se localizan en un centro comercial. El contenido de estas máquinas se presenta en la siguiente matriz de inventario:

		Coca - Cola	Fanta	Sprite
Maquina	I	65	32	84
Maquina	II	92	65	36
Maquina	III	45	72	93

Los elementos indican el número de latas de cada tipo de gaseosa que contiene cada máquina. Suponga que la matriz de ventas para el día siguiente es

		Coca - Cola	Fanta	Sprite
Maquina	I	53	25	70
Maquina	II	80	60	30
Maquina	III	35	65	85

donde los elementos indican el número de latas de cada tipo de gaseosa que vende cada máquina. Hallar la matriz de inventario al final del día.

Solución

La matriz de inventario al final del día se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 65 & 32 & 84 \\ 92 & 65 & 36 \\ 45 & 72 & 93 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 53 & 25 & 70 \\ 80 & 60 & 30 \\ 35 & 65 & 85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 7 & 14 \\ 12 & 5 & 6 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Si cada máquina se recarga con 30 latas de Coca-Cola, 20 latas de Fanta y 15 latas de Sprite, entonces la matriz de inventarios es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 12 & 7 & 14 \\ 12 & 5 & 6 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 & 20 & 15 \\ 30 & 20 & 15 \\ 30 & 20 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 27 & 29 \\ 42 & 25 & 21 \\ 40 & 27 & 23 \end{pmatrix}. \quad \nabla$$

Ahora definiremos la operación más complicada, la de multiplicar dos matrices.

2.9 Producto de matrices

Dadas A = (a_{ij}) y B = (b_{ij}), matrices en las cuales el número de columnas de A es igual al número de filas de B. Se llama producto de A y B a una matriz C = (c_{ij}) cuyo orden es el número de filas de A y el número de columnas de B, denotada

$$\mathbf{C} = (c_{ij}) = \left(\sum_{\forall k} a_{ik} b_{kj} \right), \quad \text{para todo } i, j \in \mathrm{N}.$$

La condición necesaria y suficiente para que el producto AB esté definido, es que el número de columnas de A sea igual al número de filas de B.

Ejemplo

Dadas las matrices A y B, encontrar AB y BA:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 4 & -1\\ 7 & 6 & 1\end{pmatrix} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}8 & 5\\ 6 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Solución

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}3\cdot 8+4\cdot 6+(-1)\cdot 3 & 3\cdot 5+4\cdot(-2)+(-1)\cdot 4\\ 7\cdot 8+6\cdot 6+1\cdot 3 & 7\cdot 5+6\cdot(-2)+1\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}45 & 3\\ 95 & 27\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}8\cdot 3+5\cdot 7 & 8\cdot 4+5\cdot 6 & 8\cdot(-1)+5\cdot 1\\ 6\cdot 3+(-2)\cdot 7 & 6\cdot 4+(-2)\cdot 6 & 6\cdot(-1)+(-2)\cdot 1\\ 3\cdot 3+4\cdot 7 & 3\cdot 4+4\cdot 6 & 3\cdot(-1)+4\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}59 & 62 & -3\\ 4 & 12 & -8\\ 37 & 36 & 1\end{pmatrix}. \ \nabla$$

Ejemplo

Una empresa utiliza tres tipos de materias primas P_1, P_2 y P_3 en la elaboración de tres productos Q_1, Q_2 y Q_3. El número de unidades de P_1, P_2 y P_3 usados por cada unidad de Q_1 son 4, 3 y 2 respectivamente, por cada unidad de Q_2 son 5, 3 y 4, respectivamente, y por cada unidad de Q_3 son 2, 5 y 3 respectivamente. Suponga que la empresa produce 28 unidades de Q_1, 18 unidades de Q_2 y 39 unidades de Q_3 a la semana.

a) ¿Cuál es el consumo semanal de materia prima?

b) Si los costos por unidad para P_1, P_2 y P_3 son 60, 52 y 18, respectivamente, ¿cuáles son los costos de las materias primas por unidad de Q_1, Q_2 y Q_3?

c) ¿Cuál es la cantidad total gastada en materias primas a la semana en la producción de Q_1, Q_2 y Q_3?

Solución

a) Para obtener el consumo semanal de la materia prima, construimos la matriz A de unidades por producto y una matriz B de cantidad de materia prima por producto y luego realizamos el producto AB

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 28 & 18 & 39 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 280 & 333 & 245 \end{pmatrix}.$$

b) Los costos de materia prima por unidad de cada producto lo calculamos de la siguiente manera: a la matriz B del inciso anterior le multiplicamos la matriz C de costos por unidad para cada tipo de materia prima, es decir

$$\mathbf{BC} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 52 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 432 \\ 528 \\ 434 \end{pmatrix}.$$

c) Si sumamos los tres tipos de materia prima, obtenemos la cantidad total gastada a la semana en la producción de los tres productos

$$P_1 + P_2 + P_3 = 280 + 333 + 245 = 858. \quad \nabla$$

El producto de matrices cumple las siguientes propiedades:

7 Sean A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) y C = (c_{ij}), matrices compatibles para el producto, entonces (AB)C = A(BC).

8 Sean A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) y C = (c_{ij}), matrices compatibles para el producto y suma respectivamente, entonces A(B + C) = AB + AC.

9 Sean A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) y C = (c_{ij}), matrices compatibles para la suma y el producto respectivamente, entonces (B + C)A = BA + CA.

10 Sean A = (a_{ij}), I = (δ_{ij}) matrices cuadradas de igual orden. En las matrices cuadradas es posible definir un elemento neutro respecto del producto matricial, llamado matriz unidad o identidad, representado por I, que cumple AI = IA = A.

11 Sean A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) matrices compatibles para el producto. En general, el producto de dos matrices no es conmutativo, y, por tanto AB ≠ BA

2.10 Ejercicios

1.- Realice las siguientes operaciones:

a) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -6 & 3 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 3 & 9 & 0 \\ 3 & -7 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -8 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -9 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $3\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$

e) $6\begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 12 & 9 & 2 \end{pmatrix} - 9\begin{pmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.- Determine las matrices A **y** B **sabiendo que**

$$\begin{cases} 2\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \\ -\mathbf{A} + 3\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

3.- Sean X, Y, A **y** B **matrices del mismo orden. Obtenga** X **e** Y **en función de** A **y** B**, en los siguientes casos:**

a) $\begin{cases} 3\mathbf{X} - 5\mathbf{Y} = 2\mathbf{A} \\ 4\mathbf{X} + 3\mathbf{Y} = 3\mathbf{B} \end{cases}$

b) $\begin{cases} -\mathbf{X} - 2\mathbf{Y} = 5\mathbf{A} \\ 3\mathbf{X} - 2\mathbf{Y} = -\mathbf{B} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5\mathbf{X} - 2\mathbf{Y} = -\mathbf{A} \\ 3\mathbf{X} + \mathbf{Y} = 2\mathbf{B} \end{cases}$.

4.- Multiplicar las matrices:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 3 & 9 & 0 \\ 3 & -7 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -8 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -9 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -6 & 3 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 8 & -7 & 3 \\ -5 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$.

5.- Determine A, A^2, B, B^2, AB **y** BA **sabiendo que**

a) $\begin{cases} \mathbf{A} + 2\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ 2\mathbf{A} - 3\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \mathbf{A} - 3\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ 3\mathbf{A} - 5\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2\mathbf{A} - 5\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \\ 4\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$.

6.- Dada la matriz $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$**. Determine en cada caso, todas las matrices cuadradas de 2 x 2 tales que:**

a) $AB = O$

b) $BA = O$

c) $AB = BA$

d) $AB = I$

e) $BA = I$**.**

7.- Hallar todas las matrices conmutativas con la siguiente matriz:

a) $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 1\end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.

8.- Encuentre una matriz A **de orden 2 x 2, tal que** AB = I **si** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

9.- Encontrar una matriz A **de 3 x 3 cuyos elementos cumplan la condición siguiente:**

a) $a_{ij} = i - j$

b) $a_{ij} = \text{mín}\{i, j\}$

c) $a_{ij} = j^{1+j}$

d) $a_{ij} = |i - j|$

e) $a_{ij} = \text{máx}\{i, j\}$.

10.- Hallar todas las matrices se segundo orden, cuyos cuadrados son iguales a la matriz nula.

11.- Hallar todas las matrices de segundo orden, cuyos cuadrados son iguales a la matriz identidad.

12.- Dadas las matrices $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$**. Hallar matrices C y D de orden 2, tales que AC = B y DA = B.**

13.- Determine la matriz M de modo que satisfaga la relación $\mathbf{M}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$**.**

2.11 Respuestas

1.- a) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 16 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 0 & 10 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 5 & 13 & 6 \\ -6 & -5 & -6 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} -35 & -4 \\ -31 & 13 \\ -39 & 24 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} -18 & -51 & 93 \\ 45 & 54 & 3 \end{pmatrix}$.

2.- $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{12}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{17}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{15}{7} & \frac{8}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$.

3.- a) $\begin{cases} \mathbf{X}=\frac{3}{29}(2\mathbf{A}+5\mathbf{B}) \\ \mathbf{Y}=\frac{1}{29}(9\mathbf{B}-8\mathbf{A}) \end{cases}$; b) $\begin{cases} \mathbf{X}=-\frac{1}{4}(5\mathbf{A}+\mathbf{B}) \\ \mathbf{Y}=\frac{1}{8}(\mathbf{B}-15\mathbf{A}) \end{cases}$; c) $\begin{cases} \mathbf{X}=\frac{1}{11}(4\mathbf{B}-\mathbf{A}) \\ \mathbf{Y}=\frac{1}{11}(3\mathbf{A}+10\mathbf{B}) \end{cases}$

4.- a) $\begin{pmatrix} -51 & 6 & 24 \\ 18 & 12 & 45 \\ 40 & -64 & -51 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 18 & 10 \\ 21 & 30 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 57 & 7 & -3 \\ -9 & -36 & -18 \\ 72 & 67 & 27 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 15 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{pmatrix}$; e) (-53); f)

$$\begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & 2ac+b^2 \\ a+b+c & 2ac+b^2 & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}.$$

5.- a) $\mathbf{A}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 15 \\ 8 & 22 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^2=\frac{1}{49}\begin{pmatrix} 129 & 285 \\ 152 & 604 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{B}^2=\frac{1}{49}\begin{pmatrix} 13 & 3 \\ 3 & 18 \end{pmatrix}$, $\mathbf{AB}=\frac{1}{49}\begin{pmatrix} 51 & 36 \\ 50 & 90 \end{pmatrix}$, $\mathbf{BA}=\frac{1}{49}\begin{pmatrix} 30 & 36 \\ 15 & 111 \end{pmatrix}$; b)

$\mathbf{A}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 18 \\ -11 & 13 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^2=\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -189 & 180 \\ -110 & -29 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{B}^2=\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -49 & 60 \\ -30 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{AB}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -87 & 96 \\ -54 & -19 \end{pmatrix}$, $\mathbf{BA}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -107 & 112 \\ -62 & 1 \end{pmatrix}$; c)

$\mathbf{A}=\frac{1}{22}\begin{pmatrix} 10 & -7 \\ 15 & 16 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^2=\frac{1}{484}\begin{pmatrix} -5 & -182 \\ 390 & 151 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{B}^2=\frac{1}{121}\begin{pmatrix} 90 & 9 \\ 9 & 153 \end{pmatrix}$, $\mathbf{AB}=\frac{1}{242}\begin{pmatrix} -111 & -54 \\ -87 & 237 \end{pmatrix}$, $\mathbf{BA}=\frac{1}{242}\begin{pmatrix} -45 & 111 \\ 210 & 171 \end{pmatrix}$.

6.- a) $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2c+d & 3c \\ c & d \end{pmatrix}$; d)

$\mathbf{B}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$; e) $\mathbf{B}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

7.- a) $\begin{pmatrix} d & b \\ -2b & d \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} c+d & -c \\ c & d \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} d & -c \\ c & d \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} -c+d & -c \\ c & d \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} \frac{1}{5}(2c+5d) & \frac{4}{5}c \\ c & d \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} -c+d & -\frac{3}{2}c \\ c & d \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} -c+d & \frac{4}{3}c \\ c & d \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2c+3d) & \frac{8}{3}c \\ c & d \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-9c+2d) & 2c \\ c & d \end{pmatrix}$.

8.- $\mathbf{A} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

9.- a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 81 \\ 1 & 8 & 81 \\ 1 & 8 & 81 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

10.- $\begin{pmatrix} \pm\sqrt{-bc} & b \\ c & \mp\sqrt{-bc} \end{pmatrix}$.

11.- $\begin{pmatrix} \pm\sqrt{1-bc} & b \\ c & \mp\sqrt{1-bc} \end{pmatrix}$.

12.- $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} & \frac{13}{2} \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{33}{4} & \frac{19}{4} \\ \frac{43}{4} & \frac{25}{4} \end{pmatrix}$.

13.- $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2.12 Clasificación de las matrices cuadradas

Las matrices cuadradas, desempeñan un papel muy importante en todos los aspectos del álgebra de matrices. Su estructura requiere un análisis particular, el cual se discutirá a continuación, de modo que no resulte incomprensible el estudio de las operaciones que pueden efectuarse sobre este particular tipo de matrices.

Sea A una matriz cuadrada de n x n. Dentro de este tipo de matrices, podemos distinguir tres regiones que se definen de la siguiente manera:

a) La diagonal principal, está formada por los elementos a_{ij} para los cuales $i = j$.

b) El triángulo superior, está formado por los elementos a_{ij} para los cuales $i < j$.

c) El triángulo inferior, está formado por los elementos a_{ij} para los cuales $i > j$.

Es decir, la diagonal principal de una matriz cuadrada son todos los elementos que se encuentran en la línea que va del vértice superior de la izquierda al inferior de la derecha. La diagonal secundaria la forman los elementos de una matriz que se encuentran en la línea que va del vértice superior derecho al inferior izquierdo.

Se dice que una matriz T = (t_{ij}) de orden n, es triangular superior (inferior) si existen elementos $t_{ij} = 0$, con $i > j$ ($i < j$).

Estas matrices tienen la forma siguiente:

$$\mathbf{T_S} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T_I} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Propiedades

Las matrices triangulares cumplen las siguientes propiedades:

1. La adición de dos matrices triangulares, ambas superiores o inferiores, es una matriz triangular superior o inferior.
2. El producto de dos matrices triangulares, ambas superiores o inferiores, es una matriz triangular superior o inferior.

Ejemplo

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & a+3b-c & 2a-b+c \\ a-b-c-1 & b & a+b-c \\ b-3c & 2a-2b+c & c \end{pmatrix}$$

Analice en qué condiciones es la matriz:

a) Triangular superior; b) Triangular inferior.

Solución

a) Para que la matriz A sea triangular superior, debe resolverse el siguiente sistema de ecuaciones no homogéneo:

$$\begin{cases} a-b-c-1=0 \\ b-3c=0 \\ 2a-2b+c=0 \end{cases}$$

lo cual implica que $a=-\frac{5}{3}$, b = - 2, $c=-\frac{2}{3}$. Por tanto, la matriz buscada tiene la forma siguiente:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -7 & -6 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

b) Para que la matriz A sea triangular inferior, debe resolverse el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\begin{cases} a+3b-c=0 \\ 2a-b+c=0 \\ a+b-c=0 \end{cases}$$

lo cual implica que $a = b = c = 0$. Por tanto, la matriz buscada tiene la forma siguiente:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}. \quad \nabla$$

Se dice que una matriz cuadrada es diagonal si, los triángulos superior e inferior son nulos.

Es decir:

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}.$$

Las matrices diagonales cumplen las siguientes propiedades:

3. La adición de dos matrices diagonales es una matriz diagonal.
4. El producto de dos matrices diagonales de igual orden es una matriz diagonal.
5. Una matriz diagonal conmuta con todas las matrices diagonales.

Ejemplo

Sean a y b números tales que $a \neq b$. Encuentre todas las matrices A de 2 x 2 tales que $\mathbf{A}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\mathbf{A}$.

Solución

Haciendo que $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & u\end{pmatrix}$, entonces:

$$\begin{pmatrix}x & y\\ z & u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & u\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}ax & by\\ az & bu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax & ay\\ bz & bu\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ax=ax \\ by=ay \Rightarrow (a-b)y=0 \Rightarrow y=0,\ si\ a\neq b \\ az=bz \Rightarrow (a-b)z=0 \Rightarrow z=0,\ si\ a\neq b \\ bu=bu \end{cases}$$

Por tanto

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}. \quad \nabla$$

2.12.1 Traza de una matriz

Sea una matriz cuadrada A = (a_{ij}). Se define la traza de una matriz A, a la suma de los elementos que componen la diagonal principal, representada por

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \,.$$

$$\text{Si } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 4 & 9 & 4 \\ 3 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \text{ entonces Tr(A) = -5 + 9 + 3 = 7.}$$

Propiedades

La traza de una matriz cumple con las siguientes propiedades:

1. Para todo par de matrices cuadradas A = (a_{ij}) y B = (b_{ij}) de igual orden, entonces

$$\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B).$$

2. Para toda matriz cuadrada A = (a_{ij}) y para todo número k, entonces

$$\mathrm{Tr}(kA) = k\mathrm{Tr}(A).$$

3. Para toda matriz cuadrada A = (a_{ij}), entonces

$Tr(A^T) = Tr(A)$.

4. Para todo par de matrices cuadradas y compatibles para el producto $A = (a_{ik})$ y $B = (b_{kj})$, entonces

$$Tr(AB) = Tr(BA).$$

Ejemplo

Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, de ser posible determine una matriz B tal que $Tr(AB) = Tr(A)Tr(B)$.

Solución

La matriz B debe tener la misma forma que la matriz A. Es decir

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ 5a+2c & 5b+2d \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$Tr(AB) = a + 3c + 5b + 2d, \quad Tr(A) = 3, \quad Tr(B) = a + d.$$

Por tanto

$$a + 5b + 3c + 2d = 3a + 3d \;\Rightarrow\; 2a - 5b - 3c + d = 0$$

La familia de matrices que cumple esta condición está dada por

$$\mathbf{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \, 2a - 5b - 3c + d = 0 \right\}. \quad \nabla$$

2.12.2 Potencia de una matriz

Sea A una matriz cuadrada y $n \in \mathrm{N}$. Se define la *n*-ésima potencia de A como el producto, repetido *n* veces, de A por sí misma, y se simboliza por A^n, Es decir

$$\underbrace{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\ldots\cdot\mathbf{A}}_{\text{n veces}} = \mathbf{A}^n .$$

Como propiedad tenemos lo siguiente:

Si dos matrices conmutan sus potencias naturales también conmutan**.**

Ejemplo

Sea la matriz A, hallar A^n para todo $n \in Z^+$:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución

a) Como $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

entonces:

$$n = 2: \quad \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{A};$$

$$n=3: \quad \mathbf{A}^3=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&0&0\\2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&4\\0&0&0\\4&0&4\end{pmatrix}=4\mathbf{A}=2^2\mathbf{A};$$

$$n=4: \quad \mathbf{A}^4=\begin{pmatrix}4&0&4\\0&0&0\\4&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0&8\\0&0&0\\8&0&8\end{pmatrix}=8\mathbf{A}=2^3\mathbf{A}.$$

Por lo tanto: $A^n = 2^{n-1}A$.

b) Como $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, entonces:

$$n=2: \quad \mathbf{A}^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}=3\mathbf{A};$$

$$n=3: \quad \mathbf{A}^3=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&9&9\\9&9&9\\9&9&9\end{pmatrix}=9\mathbf{A}=3^2\mathbf{A};$$

$$n=4: \quad \mathbf{A}^4=\begin{pmatrix}9&9&9\\9&9&9\\9&9&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}27&27&27\\27&27&27\\27&27&27\end{pmatrix}=27\mathbf{A}=3^3\mathbf{A}.$$

Por lo tanto: $A^n = 3^{n-1}A$. ∇

2.13 Ejercicios

1.- Encontrar una matriz diagonal A **de 3 x 3 que cumpla lo siguiente:**

a) $\mathbf{A}^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{A}^{25} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2.- Determine la traza de cada una de las matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -6 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 6 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 0 & -4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.- Dada la matriz $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} Cos\theta & -Sen\theta \\ Sen\theta & Cos\,\theta \end{pmatrix}$**. Calcular** A^n **siendo** $n \in Z^+$**.**

4.- Sea $k \neq 0$**, encuentre** A^n**,** $n \in Z^+$ **si** $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} Cos\theta & kSen\theta \\ -\frac{1}{k}Sen\theta & Cos\theta \end{pmatrix}$**.**

5.- Demuéstrese que, si A **es matriz cuadrada, entonces:**

a) $A^3 - I = (A - I)(A^2 + A + I)$

b) $A^4 - I = (A^2 + I)(A + I)(A - I)$

c) $3A^2 - 2A - I = (3A + I)(A - I)$**.**

6.- Sea $f(x)=x^2-x+3$**,** $g(x)=x^3-2x+1$**,** $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$**,** $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$**.**

Calcular:

a) $f(A)$

b) $f(B)$

c) $f(I)$

d) $f(O)$

e) $g(A)$

f) $g(B)$

g) $f(A + B)$**.**

7.- Dada la matriz A**. Hallar el valor del polinomio** $p(x)$**:**

a) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p(x)=3x^2-2x+2}$

b) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p(x)=2x^2+3x-1;}$

c) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p(x)=x^2-5x-5}$

8.- Hallar matrices A **y** B **tales que** $\mathbf{A}^2=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{B}^2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$**.**

2.14 Respuestas

1.- a) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 10^5\end{pmatrix}$**;** b) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 10^3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$**;** c) $\begin{pmatrix}10^4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$**;** d) $\begin{pmatrix}7^{25} & 0 & 0\\ 0 & 5^{25} & 0\\ 0 & 0 & 3^{25}\end{pmatrix}$**.**

2.- a) **15**; b) **101**; c) **20**.

3.- $\begin{pmatrix}Cos(n\theta) & -Sen(n\theta)\\ Sen(n\theta) & Cos(n\theta)\end{pmatrix}$**.**

4.- $\begin{pmatrix} Cos(n\theta) & kSen(n\theta) \\ -\frac{1}{k}Sen(n\theta) & Cos(n\theta) \end{pmatrix}$.

6.- a) $\begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 34 & 9 \\ 18 & 7 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} -36 & -26 \\ 39 & 3 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} -3 & -41 \\ 205 & -3 \end{pmatrix}$.

7.- a) $\begin{pmatrix} 19 & -13 & 16 \\ 10 & 22 & -3 \\ -1 & 10 & 18 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 4 & -9 & 5 \\ 5 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 20 & 26 & 27 \\ 46 & 51 & 66 \\ 67 & 86 & 100 \end{pmatrix}$.

8.- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 0 & i \end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -i & i \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ **y**

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

2.15 Transpuesta de una matriz

Sea A cualquier matriz. Considérese la matriz a partir de A intercambiando filas y columnas, de manera que la primera columna de A se convierta en la nueva fila de la nueva matriz, la segunda columna se convierta en la segunda fila, etc. La matriz obtenida a partir de A intercambiando filas y columnas de este modo se denomina transpuesta de la matriz A.

Sea A = (a_{ij}) una matriz de n x m. Mediante la transposición se obtiene una nueva matriz de m x n, representada por $A^T = (a_{ji})$ cuyos elementos se obtienen intercambiando filas por columnas (Friedberg et al., 2018; Leon, 2015; Poole, 2014).

Como ejemplo tenemos que si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 9 & 4 \end{pmatrix}$, entonces $\mathbf{A^T} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 9 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Propiedades

Las matrices transpuestas tienen las siguientes propiedades:

1.- Para toda matriz A = (a_{ij}), se cumple que $(A^T)^T = A$.

2.- Para toda matriz A = (a_{ij}) y para todo número k, se cumple que

$(kA)^T = kA^T$.

3.- Para todo par de matrices A = (a_{ij}) y B = (b_{ij}), se cumple que

$$(A + B)^T = A^T + B^T.$$

4.- Para todo par de matrices A = (a_{ij}) y B = (b_{ij}), compatibles para el producto, se cumple

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Ejemplo

Si A conmuta con B, demuestre que A^T conmuta con B^T.

Solución

Siendo AB = BA, debemos probar que $A^TB^T = B^TA^T$. Es decir:

$$A^TB^T = (BA)^T = (AB)^T = B^TA^T. \quad \nabla$$

Una matriz cuadrada A se denomina simétrica, si se cumple que esta matriz es igual a su transpuesta, es decir: $A = A^T$.

Ejemplo

Dadas dos matrices simétricas A, B de orden *n*. ¿Cuándo es el producto AB simétrico?

Solución

Si $A = A^T$ y $B = B^T$, entonces $AB = (AB)^T = B^TA^T = BA$. Por lo tanto el producto AB es simétrico, cuando es conmutativo, es decir AB = BA. ∇

Las matrices simétricas cumplen con la siguiente propiedad:

5.- Para toda matriz cuadrada A, siempre es posible encontrar una matriz simétrica S mediante $A + A^T$.

Ejemplo

Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & a+b & a-c \\ a-b & b & 2a+b \\ b-c & b+c & c \end{pmatrix}.$$

Encuentre una matriz S simétrica**.**

Solución

Sabemos que S es simétrica si se cumple que $S = A + A^T$. Es decir:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} a & a+b & a-c \\ a-b & b & 2a+b \\ b-c & b+c & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & a-b & b-c \\ a+b & b & b+c \\ a-c & 2a+b & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2a & 2a & a+b-2c \\ 2a & 2b & 2a+2b+c \\ a+b-2c & 2a+2b+c & 2c \end{pmatrix}. \quad \nabla$$

Una matriz cuadrada A se llama antisimétrica, si se cumple que esta matriz es igual al opuesto de la transpuesta, es decir: $A = -A^T$.

Las matrices antisimétricas cumplen con la siguiente propiedad:

6.- Para toda matriz cuadrada A, siempre es posible encontrar una matriz simétrica S mediante

$A + A^T$.

Ejemplo

Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & a+b & a-c \\ a-b & b & 2a+b \\ b-c & b+c & c \end{pmatrix}.$$

Encuentre una matriz R antisimétrica.

Solución

Sabemos que R es antisimétrica si se cumple que $R = A - A^T$. Es decir:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} a & a+b & a-c \\ a-b & b & 2a+b \\ b-c & b+c & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & a-b & b-c \\ a+b & b & b+c \\ a-c & 2a+b & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2b & a-b \\ -2b & 0 & 2a-c \\ -a+b & -2a+c & 0 \end{pmatrix}. \quad \nabla$$

2.16 Ejercicios

1.- Dadas las matrices siguientes:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Realice las siguientes operaciones:

a) $(3D^T - B^T C^T)^T$

b) $B(A - D)^T C$

c) $A(B^TB - CC^T)$.

2.- Sea A una matriz de 3 x 3. Determine si A es simétrica con la siguiente condición:

a) $a_{ij} = i^2 + j^2$

b) $a_{ij} = i^2 - j^2$

c) $a_{ij} = 2i - 2j$

d) $a_{ij} = 2i^2 + 2j^3$.

3.- De ser posible, encuentre todos los valores de *a*, *b* y *c* para los cuales A es simétrica:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3a-b+5c & a+4b-2c \\ 1 & 4 & a+b-c \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

4.- Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 6 & -1 & 3 \\ -6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Exprésese la matriz A como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

5.- Dadas las matrices

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 9 \\ 7 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}+\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}-\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hállense A **y** B**.**

2.17 Respuestas

1.- a) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 8 & 24 & 2 \\ 16 & -14 & 5 \end{pmatrix}$**;** b) $\begin{pmatrix} -44 & -110 \\ -49 & -35 \end{pmatrix}$**;** c) $\begin{pmatrix} -36 & -93 & -10 \\ -102 & -87 & 11 \\ -40 & -98 & -2 \end{pmatrix}$**.**

2.- a) **Si;** b) **No;**

c) **No;** d) **No.**

3.- ***a* = -1, *b* = 1, *c* = 1.**

4.- $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 8 & 9/2 & -1 \\ 9/2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$**,** $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & -3/2 & 5 \\ 3/2 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$**.**

5.- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1/2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$**,** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 13/2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 13/2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$**.**

2.18 Determinantes

2.18.1 Determinantes de segundo y tercer orden

El determinante de la matriz es el número que se calcula por ciertas reglas que consideraremos a continuación.

En el determinante se distinguen dos diagonales: principal y secundaria. Al igual que en la matriz cuadrada, la diagonal principal se compone de elementos aii, donde i = 1, 2, …, n. La diagonal secundaria pasa perpendicularmente a la principal a partir del ángulo derecho superior del

determinante al izquierdo inferior. El orden del determinante corresponde al de la matriz de determinante de la cual él sirve.

Para el conjunto de las matrices cuadradas de orden *n* se puede establecer una aplicación inyectiva de forma que a cada matriz A corresponda una función escalar de sus elementos y se representa escribiendo ésta entre barras (Golub & Van Loan, 2013).

$$\det(\mathbf{A}) = |\,\mathbf{A}\,|.$$

Se dice que dos determinantes son iguales, si al ser evaluados ambos dan el mismo número.

La definición aceptada permite desarrollar cualquier determinante, pero en la práctica no debe utilizarse directamente para los de orden superior a tres.

Si el orden de la matriz es igual a la unidad, es decir, esta matriz consta de un solo elemento a_{11}, entonces el número igual a este elemento se llama determinante de primer orden correspondiente a tal matriz.

Sea dada la matriz cuadrada de segundo orden. Se denomina determinante de segundo orden, correspondiente a esta matriz, el número

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Es decir: el determinante se segundo orden es igual al producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

Ejemplo

Evaluar el determinante de la siguiente matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solución

Evaluamos el determinante de la matriz A utilizando la correspondiente definición

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-4) \cdot 9 = 10 + 36 = 46 . \quad \nabla$$

Ejemplo

Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Encuentre de ser posible una matriz B tal que

$$\text{Det(A) = Det(AB).}$$

Solución

Sea $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 4a+5c & 4b+5d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix}$.

Por lo tanto

Det(A) = -6 y Det(AB) = $6bc - 6ad \Rightarrow -6 = 6bc - 6ad \Rightarrow ad - bc = 1$.

La matriz pedida tiene la forma siguiente:

$$\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \, ad - bc = 1 \right\}. \quad \nabla$$

Se denomina determinante de tercer orden el número

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}).$$

Es decir: a cada término del determinante de tercer orden no es sino el producto de tres de sus elementos tomados uno a uno de cada fila y cada columna. Estos productos se toman con signos determinados; con signo más se toman tres términos compuestos por los elementos de la diagonal principal y por los dispuestos en los triángulos isósceles cuyas bases son paralelas a la diagonal principal; con signo menos se toman tres términos situados de un modo análogo respecto a la diagonal secundaria. Dicha regla se llama regla de los triángulos o de Sarrus.

Ejemplo

Calcule el determinante de la siguiente matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 6 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solución

Haciendo uso de la definición correspondiente evaluamos el determinante la matriz:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 6 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$[2 \cdot (-2) \cdot 5 + (-1) \cdot 4 \cdot 2 + 6 \cdot (-3) \cdot 3] - [3 \cdot (-2) \cdot 2 + 4 \cdot (-3) \cdot 2 + (-1) \cdot 6 \cdot 5]. \quad \nabla$$

2.19 Ejercicios

1.- Evaluar los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 3 & 6 \\ 9 & 9 & 3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -5 & 6 & 5 \\ 4 & -9 & -3 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & 1 \\ -5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & -3 \\ -4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 5 & 4 & -3 \\ -3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

2.- Evaluar los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} n-2 & n-1 & n \\ n-1 & n & n \\ n & n & n \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-a & 1 \\ 1 & 1 & 3-a \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & a+1 & 3 \\ 1 & 2 & a+1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a-b & a \\ c-d & c & c \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} -e & c & a \\ c & -e & a \\ c & a & -e \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -n \\ 1 & -n & 1 \\ -n & 1 & 1 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} a+b & c & d \\ b & a+c & d \\ b & c & a+d \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 2-a^2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 9-a^2 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix} 1 & n & n \\ n & 2 & n \\ n & n & 3 \end{vmatrix}$

k) $\begin{vmatrix} n & 1 & 1 \\ 1 & n & 1 \\ 1 & 1 & n \end{vmatrix}$.

3.- Calcular el determinante de 3 x 3, cuyos elementos se establecen por las siguientes condiciones:

a) $a_{ij} = \text{mín}(i, j)$

b) $a_{ij} = \text{máx}(i, j)$

c) $a_{ij} = |2i - 3j|$.

2.20 Respuestas

1.- a) **42;** b) **324;** c) **-77;** d) **104;** e) **38;** f) **18;** g) **32;** h) **-40;** i) **30;** j) **342.**

2.- a) $-n$; b) $(a-1)(a-2)$; c) $(a-1)(a-2)$; d) $-bd$; e) $(a+c-e)(a+e)(c+e)$;

f) $(n-2)(n+1)^2$; g) $a^2(a+b+c+d)$; h) a^4-16; i) $(a-b)^2(a+2b)$; j) $2(n^3-3n^2+3)$;

k) $(n+2)(n-1)^2$ **.**

3.- a) **1;** b) **3;** c) **12.**

2.21 Desarrollo por los elementos de una fila o columna

Consideremos ahora el determinante de orden n, donde n ≥ 2. Para calcular tal determinante es necesario introducir el concepto de menor y de complemento algebraico.

Se llama menor del elemento a_{ij} del determinante de n-ésimo orden, el determinante de orden (n – 1) obtenido de la inicial borrando la *i*-ésima fila y la *j*-ésima columna (de aquella fila y de aquella columna en cuya intersección está el elemento a_{ij}).

El menor del elemento a_{ij} se designa por M_{ij}. Aquí el primer subíndice designa el número de la fila y el segundo, el número de la columna las cuales se borran.

Por ejemplo, en el determinante de tercer orden

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 9 & -4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

De menor del elemento a_{12} = -4 sirve el determinante de segundo orden

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Se denomina complemento algebraico del elemento a_{ij} del determinante de n-ésimo orden, el número

$$\mathrm{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\,\mathrm{M}_{ij}\,.$$

Es evidente que si la suma $i + j$ es par, el complemento algebraico tiene el mismo signo que el menor; si la suma $i + j$ es impar, el signo cambia, por el contrario**.**

El determinante es igual a la suma de los productos de toda fila o columna suya por los complementos algebraicos correspondientes, es decir:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{i1}\mathrm{A}_{i1} + a_{i2}\mathrm{A}_{i2} + \ldots + a_{in}\mathrm{A}_{in}$$

o bien

$$\det(\mathbf{A}) = a_{1j}\mathrm{A}_{1j} + a_{2j}\mathrm{A}_{2j} + \ldots + a_{nj}\mathrm{A}_{nj}\,.$$

La primera fórmula se llama desarrollo del determinante según los elementos de la *i*-ésima fila, y la segunda fórmula, desarrollo del determinante según los elementos de la *j*-ésima columna**.**

Ejemplo

Calcular el determinante

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 9 & -4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

desarrollándolo según los elementos de la segunda columna**.**

Solución

Desarrollando este determinante con respecto a la segunda columna, obtenemos

$$\det(\mathbf{A}) = a_{12}\mathrm{A}_{12} + a_{22}\mathrm{A}_{22} + a_{32}\mathrm{A}_{32}$$

$$= (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -37 + 51 - 24 = -10\,. \quad \nabla$$

Propiedades

Las siguientes propiedades de los determinantes, son válidas para matrices de n x n:

1.- Si todos los elementos de la i-ésima fila (columna) del determinante, a excepción de uno, por ejemplo, de a, son iguales a_{ik} cero, el determinante es igual al producto del elemento a_{ik} por su complemento algebraico.

Ejemplo

Calcular el determinante

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 9 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Solución

Desarrollándolo según los elementos de la segunda columna, obtenemos

$$\det(\mathbf{A}) = 6\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6\cdot(-1) = 6\,. \quad \nabla$$

2.- La suma de los productos de los elementos de una fila o de una columna cualquiera del determinante por los complementos algebraicos de los elementos correspondientes de la fila (columna) paralela es igual a cero.

Ejemplo

Para el determinante siguiente

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 9 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

son válidas las igualdades

$$\det(\mathbf{A}) = a_{31}\mathrm{A}_{21} + a_{32}\mathrm{A}_{22} + a_{33}\mathrm{A}_{23} = 0$$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{21}\mathrm{A}_{11} + a_{22}\mathrm{A}_{12} + a_{23}\mathrm{A}_{13} = 0$$

Solución

$$\det(\mathbf{A}) = 9\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 9\cdot(-14) + 1\cdot 1 + 5\cdot 25 = -126 + 1 + 125 = 0$$

$$\det(\mathbf{A}) = 2\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 = 6 - 6 = 0 \text{.} \quad \nabla$$

3.- El valor de un determinante no varía si se cambian las filas por columnas, y éstas por aquéllas, sin alterar el orden relativo de los elementos de cada una.

Ejemplo

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ -3 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \\ 9 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 7 \cdot 1 + (-3) \cdot 3 \cdot 9 + 5 \cdot 1 \cdot 8 - 5 \cdot 7 \cdot 9 - 3 \cdot 8 \cdot 2 - 1 \cdot (-3) \cdot 1$$

$$= -387 \text{.} \quad \nabla$$

4.- Si se multiplican todos los elementos de una fila o columna por un número diferente de cero, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

Esta propiedad puede enunciarse como: el factor de todos los elementos de cierta fila o de cierta columna puede ser extraído del determinante.

Ejemplo

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1/2 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 + 1 \cdot 5 \cdot 2 + (-3) \cdot 5 \cdot 2 - 2 \cdot 7 \cdot 2 - 5 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} - (-3) \cdot 1 \cdot 8\right)$$

$$= 2 \cdot \left(-\frac{17}{2} \right) = -17 . \quad \nabla$$

Ejemplo

Sin desarrollar el determinante, demostrar la siguiente identidad

$$\begin{vmatrix} ma_1 & mb_1 & mc_1 \\ na_2 & nb_2 & nc_2 \\ pa_3 & pb_3 & pc_3 \end{vmatrix} = mnp \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} .$$

Solución

Extraemos *m* de la primera fila de la matriz, *n* de la segunda fila y *p* de la tercera fila. Es decir

$$m \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ na_2 & nb_2 & nc_2 \\ pa_3 & pb_3 & pc_3 \end{vmatrix} = mn \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ pa_3 & pb_3 & pc_3 \end{vmatrix} = mnp \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} . \quad \nabla$$

5.- Si B se obtiene a partir de A intercambiando dos filas (o dos columnas) adyacentes sin alterar el orden relativo de los elementos de cada una, entonces el valor absoluto del determinante no varía, pero cambia su signo.

Ejemplo

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 4 & 9 & 5 \\ 6 & 2 & 8 \\ 1 & -6 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 9 & 5 \\ 1 & -6 & -3 \\ 6 & 2 & 8 \end{vmatrix} = -(-212) = 212 . \quad \nabla$$

6.- Si en una matriz cuadrada todos los elementos de una fila (o columna) son cero, el valor de su determinante es cero.

Ejemplo

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 7 \\ 4 & 0 & 9 \\ 8 & 0 & -12 \end{vmatrix}$$

$$= 9\cdot 0\cdot(-12) + 0\cdot 9\cdot 8 + 4\cdot 0\cdot 7 - 7\cdot 0\cdot 8 - 9\cdot 9\cdot 0 - 0\cdot 4\cdot(-12)$$

$$= 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0\,.\ \nabla$$

7.- Si en una matriz cuadrada, los elementos correspondientes de dos filas (o dos columnas) son idénticos, entonces el valor de su determinante es cero.

Ejemplo

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 4 & 7 & 9 \\ 15 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 7\cdot 9 + 7\cdot 9\cdot 15 + 4\cdot 7\cdot 9 - 9\cdot 7\cdot 15 - 9\cdot 7\cdot 1 - 4\cdot 7\cdot 9$$

$$= 63 + 945 + 252 - 945 - 63 - 252 = 0\,.\ \nabla$$

8.- Un determinante es nulo si los elementos de una fila (o columna) son proporcionales a los términos de una paralela a ella.

Ejemplo

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0 \text{ .} \quad \nabla$$

9.- Si todos los elementos de la i-ésima fila del determinante de n-ésimo orden están representados en forma de la suma de dos sumandos; $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$ (j = 1, 2, …, n), el determinante dado es igual a la suma de dos determinantes en los cuales todas las filas, a excepción de la i-ésima, son las mismas que en el determinante asignado, y la i-ésima fila en uno de los sumandos consta de los b_{ij}, mientras que, en el otro, de los elementos c_{ij}.

Es decir: sean A, B y C matrices iguales, excepto para la columna *j*, y supóngase que la columna *j* de C es la suma de las columnas de *j* de A y B. Entonces Det(C) = Det(A) + Det(B).

Ejemplo

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & -9 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & -9 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & -9 & 3 \end{vmatrix} = -379 - 145 = -524 \text{ .} \quad \nabla$$

10.- El determinante no cambiará si a los elementos de una de sus filas (columnas) se les añaden los elementos correspondientes de otra fila (columna) multiplicados por un mismo número.

Ejemplo

Multipliquemos por 3 la tercera fila del determinante original, y sumemos lo obtenido a la segunda fila, entonces

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 4 & 3 & 10 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\cdot 3\cdot 2 + 1\cdot 7\cdot 10 + 4\cdot 0\cdot 9 - 1\cdot 3\cdot 9 - 4\cdot 7\cdot 2 - 2\cdot 0\cdot 10$$

$$= 12 + 70 + 0 - 27 - 56 - 0 = -1. \quad \nabla$$

11.- El determinante de una matriz de la forma triangular o diagonal, es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Ejemplo

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 9 & 7 & 3 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9\cdot 8\cdot 10 + 7\cdot 1\cdot 0 + 0\cdot 0\cdot 3 - 3\cdot 8\cdot 0 - 1\cdot 0\cdot 9 - 0\cdot 7\cdot 1$$

$$= 720 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 720. \quad \nabla$$

2.21.1 Transformaciones elementales

Aplicando las propiedades mencionadas de los determinantes, se puede simplificar el problema de calcular los determinantes de n-ésimo orden. Las transformaciones que no varían la magnitud de determinante suelen denominarles elementales**.**

Ejemplo

Calcular el determinante

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & 10 \\ 3 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}.$$

Desarrollándolo según los elementos de la primera columna**.**

Solución

Desarrollándolo con respecto a la primera columna, tenemos

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}\mathrm{A}_{11} + a_{21}\mathrm{A}_{21} + a_{31}\mathrm{A}_{31} + a_{41}\mathrm{A}_{41}\,.$$

Hallamos los complementos algebraicos

$$\det(\mathbf{A}) = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} - (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} - 2\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} +$$

$$3\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot 4 + (-1)\cdot(-6) + (-2)\cdot 4 + 3\cdot(-1) = -1\,.\quad \nabla$$

El cálculo del determinante se simplifica considerable si, utilizando las propiedades del mismo, éste se transforma de un modo tal que al calcularlo se puede aplicar $\det(A) = a_{ik}A_{ik}$.

Ejemplo

Calcular el determinante

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & 10 \\ 3 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}.$$

con ayuda de las transformaciones elementales**.**

Solución

Aplicando las transformaciones elementales del determinante, hagamos ceros todos los elementos de la primera fila, a excepción de $a_{11} = 1$. Para esto, conservando la primera columna sin variar, multipliquemos todos sus elementos por (-1) y adicionemos lo obtenido sucesivamente a las columnas 2, 3 y 4. Tenemos

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & 10 \\ 3 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 8 & 12 \\ 1 & 1 & 7 & 17 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 8 & 12 \\ 1 & 7 & 17 \end{vmatrix}$$

En el determinante de tercer orden obtenido hagamos nulos también todos los elementos de la tercera fila, salvo el primero. Para esto, conservando sin variar la primera columna, multipliquémosla sucesivamente por (-7) y por (-17) y adicionemos lo obtenido a las columnas 2 y 3, respectivamente; desarrollemos el determinante obtenido según los elementos de la tercera fila:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 3 & -17 & -46 \\ 5 & -27 & -73 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -17 & -46 \\ -27 & -73 \end{vmatrix} = -1. \quad \nabla$$

2.22 Ejercicios

1.- Evalúe los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 8 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 9 \\ 5 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 9 & 11 & 10 & 8 \\ 5 & 7 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 5 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 8 & 5 \\ 5 & -1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 & 5 \\ 4 & 8 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 8 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 9 \\ 10 & -4 & 2 & 12 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & -7 & -1 & 9 \end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -7 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

2.- Desarrollar por los elementos de la primera columna y calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 & b \\ 1 & 1 & 2 & c \\ 1 & 1 & 1 & d \end{vmatrix}.$$

3.- Desarrollar por los elementos de la primera fila y calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

4.- Desarrollar por los elementos de la primera fila y calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

5.- Dado que Det(A**) = 81 y B es una matriz igual a** A**, excepto que la primera y tercera filas fueron intercambiadas una por la otra. ¿Cuál es el valor de Det(**B**)?**

6.- Si Det(A**) = 9 y** B **es una matriz igual a** A**, excepto que la segunda y tercera filas fueron intercambiadas entre sí. ¿Cuál es el valor de Det(**B**)?**

7.- Sean A **y** B **matrices cuadradas de 4 x 4 tales que Det(**A**) = -15 y Det(**B**) = -6. Encuentre Det(**AB**), Det(**A^3**), Det(5**B**); Det(**$AB)^T$**.**

8.- Si A **es una matriz simétrica, demuestre que Det(**A + B**) = Det(**A + B^T**).**

9.- Si $\mathbf{A^T B^T} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ **y Det(**B**) = 3. ¿Cuál es el Det(**A**)?**

10.- Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 16$ **, encuentre:**

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -d & -e & -f \\ a+g & b+h & c+i \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$.

2.23 Respuestas

1.- Evalúe los siguientes determinantes:

a) 1260; b) 623; c) -266; d) 21; e) 980; f) 378; g) -108; h) -16; i) -280; j) -146.

2.- $-a-b-c+4d$ **.**

3.- $2a-b-c-d$ **.**

4.- $3a-b+2c+d$ **.**

5.- -81.

6.- -9.

7.- $\det(AB) = 90$, $\det(A^3) = -3375$, $\det(5B) = -3750$, $\det(AB)^T = 90$.

9.- $\det(\mathbf{A}) = -\frac{10}{3}$.

10.- a) -16; b) -48; c) 16.

2.24 Inversa de una matriz

Un matriz cuadrada se llama inversa respecto a la matriz cuadrada dada si la multiplicación de aquella tanto a la derecha como a la izquierda por la matriz dada resulta la matriz identidad. Para la matriz A la matriz inversa se designa A-1. Por definición

$$AA\text{-}1 = A\text{-}1A = I$$

El determinante de una matriz se relaciona de manera importante con el concepto de no singularidad de una matriz.

Sea A una matriz de *n* x *n*. Si B es una matriz de *n* x *n* tal que AB = I y BA = I, donde I es la matriz identidad de *n* x *n*, entonces se dice que la matriz B es una inversa de la matriz A y se representa por $B = A^{-1}$. Además podemos decir que toda matriz cuadrada A de *n* x *n* se denomina singular, si su determinante es igual a cero; en caso contrario, se denomina no singular (Axler, 2015; Meyer, 2000; Strang, 2016).

Propiedades

1. Para que la matriz cuadrada A tenga inversa, es necesario y suficiente que el determinante de la matriz A sea diferente de cero.

1. Si una matriz A de *n* x *n* tiene inversa, entonces ella es única.

2. Si A y B son matrices no singulares, entonces:

a.- AB es no singular y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

b.- A^{-1} es no singular y $(A^{-1})^{-1} = A$.

c.- Para $k \neq 0$, kA es no singular y $(k\mathrm{A})^{-1} = k^{-1}A^{-1}$.

Ejemplo

Para toda matriz A de n x n, no singular se cumple que

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{Det}(\mathbf{A})}.$$

Solución

Como $A^{-1}A = I$, se concluye que $\mathrm{Det}(A^{-1}A) = \mathrm{Det}(I)$. Por consiguiente, se debe tener que

$\mathrm{Det}(A^{-1})\mathrm{Det}(A) = 1$. Como $\mathrm{Det}(A) = 0$, la demostración puede completarse dividiendo entre Det(A), es decir

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{Det}(\mathbf{A})}. \quad \nabla$$

Ejemplo

Si A y B son matrices de n x n con B no singular, demuestre que Det(A) = $\mathrm{Det}(B^{-1}AB)$.

Solución

Haciendo uso de la propiedad del producto de determinantes, tenemos

$$\text{Det}(B^{-1}AB) = \text{Det}(B^{-1})\text{Det}(A)\text{Det}(B) = \text{Det}(A)\text{Det}(B^{-1})\text{Det}(B)$$

$$= \text{Det}(A)\frac{1}{\text{Det}(\mathbf{B})}\text{Det}(B)$$

$$= \text{Det}(A). \quad \nabla$$

Ejemplo

Sean A y B matrices de *n* x *n* con B no singular. Dé un ejemplo para el que $B^{-1}AB \neq A$. Luego, demuestre que $\text{Det}(B^{-1}AB) = \text{Det}(A)$.

Solución

Haciendo

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1}\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -27 & -49 \\ 16 & 29 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Det}(B^{-1}AB) = \text{Det}(B^{-1})\text{Det}(A)\text{Det}(B) = \text{Det}(B^{-1})\text{Det}(B)\text{Det}(A)$$

$$= \frac{1}{\text{Det}(\mathbf{B})}\text{Det}(B)\text{Det}(A) = \text{Det}(A). \quad \nabla$$

Ejemplo

Si A y B son matrices no singulares, muestre que $\text{Det}(ABA^{-1}B^{-1}) = 1$.

Solución

Dado que A y B son matrices no singulares, se cumple lo siguiente:

$$\text{Det}(\mathbf{ABA}^{-1}\mathbf{B}^{-1}) = \text{Det}(\mathbf{A})\text{Det}(\mathbf{B})\text{Det}(\mathbf{A}^{-1})\text{Det}(\mathbf{B}^{-1})$$

$$= \mathrm{Det}(\mathbf{A})\mathrm{Det}(\mathbf{B})\frac{1}{\mathrm{Det}(\mathbf{A})}\frac{1}{\mathrm{Det}(\mathbf{B})} = 1\,. \quad \nabla$$

Consideremos el proceso de inversión de una matriz. Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

una matriz cuadrada no singular de n-ésimo orden cuyo determinante det(A) ≠ 0. Formemos la matriz a partir de los complementos algebraicos de los elementos de la matriz dada y luego la transponemos. La matriz obtenida se llama adjunta respecto a la matriz A y se representa como Ã:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \dots & \mathrm{A}_{1n} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} & \dots & \mathrm{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{A}_{n1} & \mathrm{A}_{n2} & \dots & \mathrm{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

Calculamos los productos AÃ y ÃA, obteniendo

$$\mathrm{A\tilde{A}} = \mathrm{\tilde{A}A} = \det(\mathrm{A})\cdot\mathrm{I}$$

con la particularidad de que det(A) ≠ 0, entonces

$$\mathbf{A}\cdot\frac{\mathbf{A}}{\det(\mathbf{A})} = \frac{\mathbf{A}}{\det(\mathbf{A})}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}\,.$$

Por otro lado, según la definición de matriz inversa tenemos

$$\mathrm{AA}^{-1} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{I}$$

Comparando las últimas igualdades matriciales, obtenemos la fórmula para hallar la matriz inversa

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}}{\det(\mathbf{A})} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo

Hallar la matriz inversa A^{-1} para la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solución

Calculamos el determinante para la matriz A:

$$\det(A) = 2\cdot2\cdot5 + 3\cdot3\cdot2 + 1\cdot4\cdot3 - 2\cdot2\cdot3 - 1\cdot3\cdot5 - 4\cdot3\cdot2 = -1$$

Puesto que $\det(A) \neq 0$, la matriz inversa A^{-1} existe. Hallamos los complementos algebraicos de los elementos de la matriz A:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa

$$\mathbf{A}^{-1} = -\begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \quad \nabla$$

Ejemplo

Invertir la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución

Calculamos el determinante por los elementos de la primera fila:

$\det(A) = 1\cdot(-8) + 2\cdot(-1) + 4\cdot 7 + 2\cdot(-6) = 6$

Puesto que $\det(A) \neq 0$, la matriz inversa A^{-1} existe.

Hallamos los complementos algebraicos de los elementos de la matriz A:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & 2 & -30 & 52 \\ -1 & 1 & -3 & 8 \\ 7 & -1 & 21 & -38 \\ -6 & 0 & -24 & 42 \end{pmatrix}.$$

Calculamos la inversa

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -8 & 2 & -30 & 52 \\ -1 & 1 & -3 & 8 \\ 7 & -1 & 21 & -38 \\ -6 & 0 & -24 & 42 \end{pmatrix}. \quad \nabla$$

Usando el método de operaciones elementales, los cálculos se realizan convenientemente en la matriz aumentada más grande, formada combinando las matrices. Para la matriz dada A de *n*-ésimo orden construimos una matriz rectangular $(\mathrm{A} \mid \mathrm{I})$ de dimensión (n x $2n$), añadiendo a la derecha de A una matriz unidad. Luego, haciendo uso de las transformaciones elementales sobre las filas, reducimos la matriz $(\mathrm{A} \mid \mathrm{I})$

a la forma (I | B), lo que es siempre posible, si A es regular. En este caso $B = A^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right).$$

Cuando hacemos las operaciones elementales de filas para reducir a A en el lado derecho de (I |A) también las hacemos en el lado izquierdo. Por lo tanto, hacemos en I exactamente las operaciones elementales de filas utilizadas para reducir a A. Esto produce una matriz C que es un producto de matrices elementales cada una efectuando una de las operaciones utilizadas para reducir a A. Por lo tanto, sea o no $A_R = I$ tenemos $CA = A_R$. Cuando $A_R = I$, C debe ser A^{-1}.

Ejemplo

Hallar la inversa de la siguiente matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 8 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solución

Comenzaremos el proceso de operaciones elementales, formando la matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Luego designamos a la primera fila como fila base y a la segunda fila le restamos cuatro veces la fila base:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -15 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Elegimos la segunda fila como fila base y a la primera fila multiplicada por 10, le sumamos 3 veces la fila base; a la tercera fila multiplicada por 5, le sumamos la fila base:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 20 & 0 & -5 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -10 & -15 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Por último, elegimos la tercera fila como fila base. A la primera fila le sumamos la fila base; a la segunda fila le sumamos 3 veces la fila base:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 20 & 0 & 0 & -6 & 4 & 5 \\ 0 & -10 & 0 & -16 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Dividimos la primera fila para 20, la segunda fila para –10 y la tercera fila para 5:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & -\frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 1 \end{array}\right)$$

De esta manera obtenemos la matriz inversa:

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}. \quad \nabla$$

2.25 Ejercicios

1.- De ser posible, encuentre los valores de *a*, para que la matriz dada sea invertible:

a) $\begin{pmatrix} a & 3 & -1 \\ 1 & a+1 & a-1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 4 \\ 2 & 2-a & a+3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ a-1 & a & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & a+1 & a-2 \\ 2 & 0 & a+3 \end{pmatrix}$.

2.- De ser posible, encuentre la inversa de la matriz dada:

$$\begin{pmatrix} Sen\theta & Cos\theta & 0 \\ -Cos\theta & Sen\theta & 0 \\ Sen\theta - Cos\theta & Sen\theta + Cos\theta & 1 \end{pmatrix}.$$

3.- En cada una de las matrices siguientes, determínense los valores de *t* para los que la matriz es singular:

a) $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3-t & t^2 \\ 4 & 2+t \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2+t & 1 \\ 2 & 1-t \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} t^2-1 & -1 \\ -1 & t^2+1 \end{pmatrix}$.

4.- Encuentre α tal que la matriz A sea no singular $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}$.

5.- Encuentre la matriz A dado que $(3\mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

6.- Dada la matriz A, de ser posible encuentre una matriz B de 2 x 2, tales que $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7.- De ser posible, encuentre α tal que la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ sea su propia inversa.

8.- Determine la inversa de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

9.- Determine la inversa de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

2.26 Respuestas

1.- a) $a \neq \frac{1}{2}$ **y** $a \neq 1$; b) $a \neq \frac{1}{6}$ **y** $a \neq 1$; c) $a \neq \frac{1}{2}$; d) $a \neq \frac{1}{2}$ **y** $a \neq -5$.

2.- $\begin{pmatrix} Sen\theta & -Cos\theta & 0 \\ Cos\theta & Sen\theta & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3.- a) $t = 1$; b) $t = \frac{6}{5}$ **y** $t = -1$; c) $t = -1$ **y** $t = 0$;

d) $t = -\sqrt[4]{2}$ **y** $t = \sqrt[4]{2}$.

4.- $\alpha \neq -3$.

5.- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{17} & -\frac{2}{51} \\ \frac{1}{51} & \frac{5}{51} \end{pmatrix}$.

6.- a) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2c+d & -2c \\ c & d \end{pmatrix}$;

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} c+d & b \\ 2b & d \end{pmatrix}$; c) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} c+d & c \\ c & d \end{pmatrix}$.

7.- $\alpha = 4$.

8.- $\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ -b & ab+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{pmatrix}$.

9.- a) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & -\frac{4}{21} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ \frac{3}{14} & \frac{13}{42} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -\frac{13}{34} & -\frac{25}{34} & \frac{23}{34} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{34} & \frac{7}{34} & -\frac{1}{34} \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{15} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{15} \\ -\frac{29}{105} & -\frac{2}{35} & \frac{1}{15} \\ \frac{17}{105} & \frac{6}{35} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}$.

2.27 Sistemas de ecuaciones lineales

2.27.1 Resolución de ecuaciones matriciales

Un sistema de *n* ecuaciones lineales con *n* incógnitas se puede expresar matricialmente en la forma

$$AX = B.$$

Para resolver una ecuación matricial de la forma AX = B, multiplicamos a la izquierda ambos miembros suyos por A^{-1}, suponiendo que la matriz A^{-1} existe

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

Pero el producto $A^{-1}A = I$; por consiguiente $IX = A^{-1}B$, de donde

$$X = A^{-1}B.$$

Ejemplo

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-3y+z=1 \\ x+2y-3z=3 \end{cases}.$$

Solución

Expresamos matricialmente este sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes

$$\text{Det(A)} = 14.$$

La matriz A admite inversa, por lo tanto

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 7 & -4 & -3 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos

$$\mathbf{X}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 7 & -4 & -3 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 15 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{15}{14} \\ \frac{3}{14} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad \nabla$$

Ejemplo

Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple del número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión?

Solución

Si llamamos x, y, z, al número de hombres, mujeres y niños, respectivamente, que fueron de excursión, tendremos:

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ x + y = 3z \\ y + 1 = x \end{cases}$$

ordenamos:

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ x + y - 3z = 0 \\ -x + y = -1 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones. Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes

$$\text{Det}(A) = 8.$$

La matriz A admite inversa, por lo tanto

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos

$$\mathbf{X} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Luego, habrán asistido 8 hombres, 7 mujeres y 5 niños a la excursión. ∇

Ejemplo

Cierto estudiante obtuvo, en un control que constaba de 3 preguntas, una calificación de 8 puntos. En la segunda pregunta sacó dos puntos más que en la primera y un punto menos que en la tercera. ¿Determinar la puntuación obtenida en cada una de las preguntas?

Solución

Si llamamos *x*, *y*, *z*, a la puntuación obtenida en cada pregunta, respectivamente, tendremos:

$$\begin{cases} x + y + z = 8 \\ y = x + 2 \\ y = z - 1 \end{cases}$$

ordenamos:

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ -x + y = 2 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones. Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes

Det(A) = -3.

La matriz A admite inversa, por lo tanto

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos

$$\mathbf{X} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Luego, habrá obtenido 1 punto en la primera pregunta, 3 en la segunda y 4 en la tercera. ∇

2.28 Ejercicios

1.- Determinar el valor de *k*, para que el siguiente sistema no tenga solución:

$$\begin{cases} 4x + 2y + kz = 2 \\ y + z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}.$$

2.- Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x+3y-z=1 \\ 2x-2y+z=0 \\ 5x+6y+3z=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y+z=8 \\ 5x-3y+2z=3 \\ 7x+y+3z=20 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x-5y+6z=3 \\ 8x-7y-3z=9 \\ 7x-8y+9z=6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-y-6z=3 \\ x-3y+2z=5 \\ x+y-4z=1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5x-3z=4(1+y) \\ 2(z+2x)=8+y \\ 2y+3x=14-z \end{cases}$

f) $\begin{cases} x-5y+2z=-3 \\ 2x+8y-z=1 \\ 3x+3y-5z=5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ x+5y-2z=4 \\ 3x+5y-7z=2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 7x+4y-3z=3 \\ 4x-3y+z=1 \\ 6x-7y+3z=6 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x-y+3z=0 \\ x+4y-z=1 \\ x-7y+3z=2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2x+y-5z=2 \\ x-8y+6z=8 \\ x+3y-z=5 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x+9y-6z=8 \\ x+5y-3z=1 \\ 5x+y-z=7 \end{cases}$

l) $\begin{cases} 7x+9y-z=0 \\ 4x+6y-3z=1 \\ x+7y-5z=2 \end{cases}$

3.- El precio de entrada a cierta exposición es de 20 dólares para los niños, 50 para los adultos y 25 para los jubilados. En una jornada concreta, la exposición fue visitada por 200 personas en total, igualando el número de visitantes adultos al de niños y jubilados juntos. La recaudación de dicho día ascendió a 7350 dólares. ¿Cuántos niños, adultos y jubilados visitaron la exposición ese día?

4.- En un supermercado van a poner en oferta dos marcas de detergente (A y B). El propietario consulta su libro de cuentas para ver las condiciones de una oferta anterior, encontrando la siguiente información: el número total de paquetes vendidos fueron 1.000 unidades; el precio del paquete A 5 dólares; y el importe total de la oferta 4400 dólares. Pero en sus anotaciones no aparece reflejado claramente el precio del paquete B. ¿Cuántos paquetes se venden de cada marca?

¿Averiguar si el precio del paquete B fue 4 o 4,5 dólares? ¿Cuántos paquetes se vendieron?

5.- Una escuela tiene abiertas 3 sucursales en la ciudad. El número total de matriculados es 352, pero los matriculados en la tercera son sólo una cuarta parte de los matriculados en la primera. Además, la diferencia entre los matriculados en la primera y los matriculados en la segunda es inferior en dos unidades al doble de los matriculados en la tercera. ¿Averiguar el número de alumnos matriculados en cada sucursal?

6.- En el trayecto que hay entre su casa y el trabajo, un individuo puede cargar gasolina en tres estaciones de servicio (A, B y C). El individuo recuerda que este mes el precio de la gasolina en A ha sido de 1.2 dólares/galón y el precio de la gasolina en B de 1.18 dólares/galón, pero ha olvidado el precio en C. (Supongamos que son" m" dólares/galón). También recuerda que:

- la suma del gasto en galones de gasolina en las estaciones A y B superó en 46.8 dólares al gasto en C.

- el número de galones de gasolina consumidos en B fue el mismo que en C.

- el gasto de galones en A superó al de B en 12.6 dólares.

¿Determinar los galones consumidos en cada gasolinera? ¿Puede dar algún precio al que sea imposible haber vendido la gasolina en la gasolinera C?

7.- Un agente inmobiliario puede realizar 3 tipos de operaciones: venta de un piso nuevo, venta de un piso usado y alquiler. Por la venta de cada piso nuevo recibe una prima de 12000 dólares. Si la operación es la venta de un piso usado recibe 6000 dólares. Se desconoce la prima cuando la operación es un alquiler.

Este mes el número total de operaciones fue 5. La prima total por venta de pisos fue superior en 20000 dólares a la obtenida por alquileres, y la prima total por venta de pisos nuevos fue el triple que por alquileres.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (sin resolverlo) para obtener el número de operaciones de cada tipo realizadas (en función de la prima de alquiler de valor desconocido).

b) Indica una prima a la que es imposible que se hayan podido pagar los alquileres.

c) Indica tres primas a las que es posible que se hayan podido pagar los alquileres.

d) Si la prima de alquileres fue de 2000 dólares. ¿Cuántas operaciones de cada tipo se realizaron?

8.- Un ama de casa adquirió en el mercado ciertas cantidades de papas, manzanas y naranjas a un precio de 1, 1.2 y 1.5 dólares/kilogramo, respectivamente. El importe total de la compra fueron 11.6 dólares. El peso total de la misma 9 kilogramos. Además, compró 1 kilogramo más de naranjas que de manzanas. ¿Determinar la cantidad comprada de cada producto?

9.- En una confitería envasan los bombones en cajas de 250 gramos, 500 gramos y 1 kilogramo. Cierto día se envasaron 60 cajas en total, habiendo 5 cajas más de tamaño pequeño (250 gramos) que de tamaño mediano (500 gramos). Sabiendo que el precio del kilogramo de bombones es 4 dólares y que el importe total de los bombones envasados asciende a 125 dólares. ¿Determinar cuántas cajas se han envasado de cada tipo?

2.29 Respuestas

1.- $k = 6$.

2.- a) $x = \frac{10}{37}, y = \frac{7}{37}, z = -\frac{6}{37}$; b) $x = 2, y = 3, z = 1$; c) $x = 2, y = 1, z = 0$; d) $x = 4, y = \frac{1}{5}, z = \frac{4}{5}$; e) $x = \frac{95}{33}, y = \frac{94}{33}, z = -\frac{1}{3}$; f) $x = -\frac{37}{108}, y = \frac{7}{108}, z = -\frac{7}{6}$; g) $x = \frac{19}{81}, y = \frac{77}{81}, z = \frac{40}{81}$; h) $x = \frac{27}{8}, y = \frac{93}{8}, z = \frac{179}{8}$; i) $x = \frac{5}{3}, y = -\frac{1}{3}, z = -\frac{2}{3}$; j) $x = \frac{151}{34}, y = \frac{47}{68}, z = \frac{103}{68}$; k) $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{13}{2}, z = -11$; l) $x = -\frac{1}{17}, y = 0, z = -\frac{7}{17}$. $x = \frac{10}{37}, y = \frac{7}{37}, z = -\frac{6}{37}$.

3.- A la exposición, habrán acudido 30 niños, 100 adultos y 70 jubilados.

4.- Como el número de paquetes vendido de cada marca debe ser un número entero, el precio del paquete B tiene que haber sido 4

dólares. En estas condiciones, se habrían vendido 400 paquetes de la marca A y 600 paquetes de la marca B.

5.- Habrá 200 alumnos matriculados en la primera sucursal, 102 en la segunda y 50 en la tercera.

6.- Resultaría imposible haber vendido la gasolina a 2.36 dólares el galón en la gasolinera C.

7.- Habría vendido 1 piso nuevo, 2 pisos usados y realizado 2 alquileres.

8.- Habrá comprado 2 kg. de papas, 3 kg. de manzanas y 4 kg. de naranjas.

9.- Se habrán envasado 25 cajas pequeñas, 20 medianas y 15 grandes**.**

CAPÍTULO III

3 MÉTODOS DE DEMOSTRACIÒN MATEMÀTICA

DESTREZAS CON CRITERIO DE DESEMPEÑO

ONCDM.5.3.1. Analizar y valorar la importancia de los métodos de demostraciones en la comprobación de las diferentes afirmaciones propuestas en matemáticas y otras áreas.

ONCDM.5.3.2. Explicar las diferencias básicas (Axiomas, lema, corolario, hipótesis, tesis, teorema) utilizados en las demostraciones matemáticas.

ONCDM. 5.3.3 Aplicar las reglas de inferencia lógica matemática en la obtención de conclusiones a partir de premisas dadas.

ONCDM. 5.3.4 Explicar y aplicar el método por contraejemplo en la demostración de afirmaciones matemáticas propuestas.

ONCDM. 5.3.5 Argumentar el grado de veracidad de una afirmación matemática mediante el método de reducción al absurdo

3.1 Métodos de demostración

En la demostración de muchos teoremas y otras proposiciones que se presentan en el Algebra y en el Análisis (Análisis real, topología, geometría, etc) se aplican ordenadamente los pasos lógicos, agotando todas las premisas (antecedentes o hipótesis) para verificar la conclusión (Consecuente o tesis). (Enderton, 2001; Hammack, 2013; Velleman, 2006).

3.1.1 Importación de los métodos de demostración

La Demostración genera confianza en el estudiante, lo que sirve de manera de impulso o motivación para que el estudiante desarrolle su conocimiento y capacidades.

Además, la demostración sirve dentro de los parámetros de la expresión del estudiante por medio del lenguaje matemático, porque debe expresarse correctamente ya sea de manera oral o por escrita, debe ser ordenado en lo que escribe y debe tener lógica para llegar a una demostración de una tesis.

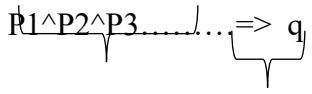
Por tanto, ayuda a que el estudiante desarrolle habilidades como la argumentación y la deducción.

3.2 Tipos de demostración

Tenemos dos Tipos principales de Demostración**.**

3.2.1 Método directo de demostración

Consiste en utilizar la validez de la inferencia de la forma:



En esta forma de demostración, se utilizan todas las premisas Pi, paso a paso, hasta verificar la conclusión q

3.3 Método por reducción al absurdo

Este método consiste en negar la conclusión q y considerarla como premisa, luego de inferir válidamente la negación de alguna de las premisas Pi del conjunto {P1, P2,…..}, para ambos métodos, si la conclusión se deduce correctamente del conjunto de premisas, la inferencia es válida (la conclusión es consecuencia lógica del conjunto de premisas).

3.3.1 Definiciones básicas

Axioma: Es una proposición que, por el grado de evidencia y de certeza que exhibe, es admitida sin demostración.

Ejemplo: El 1 es un número natural, entonces, está en el conjunto N de los números naturales.

Teorema: Un teorema es una proposición cuya validez se demuestra. En matemática, es toda proposición que, partiendo de un supuesto, afirma una nacionalidad no evidente por si mismo.

Ejemplo: Teorema de Pitágoras: En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Teorema de Thales: Si en el interior de un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados se forma otro triángulo que es semejante al triángulo original.

Lema: Es una proposición demostrada, utilizada para establecer un teorema menor o una premisa auxiliar que forma parte de un teorema más general.

Ejemplo: Lema de Euclides: Si n es un número entero y divide a un producto ab y es coprimo con uno de los factores, entonces n divide el otro factor.

Corolario: Es un razonamiento, juicio o hecho que es consecuencia lógica de lo demostrado o sucedido anteriormente.

Ejemplo: La suma de las medidas de los ángulos interiores asociados a un triángulo es $\mathbf{180^0}$, se obtiene:

Corolario: La suma de las medidas de los ángulos agudos asociados a un triángulo rectángulo es igual a $\mathbf{90^0}$.

Corolario 2: Si dos ángulos de un triángulo son respectivamente congruentes a dos ángulos de otro, el tercer ángulo de uno es congruente al tercer ángulo del otro.

Hipótesis: Es una fórmula de la que se parte para alcanzar finalmente otra fórmula mediante deducciones válidas.

Ejemplo: En estadística tenemos Hipótesis Alternativa e Hipótesis Nula.

Tesis: Es una conclusión, proposición, opinión o teoría que se mantiene con razonamientos.

Teorema: Es una proposición cuya verdad se demuestra**.**

3.3.2 Proposiciones

Una proposición es una expresión que puede ocupar un lugar por si misma y que su valor lógico puede ser verdadero o falso. (Copi et al., 2014; Hurley, 2014; Rosen, 2012).

EJEMPLO

- María está barriendo (si es proposición)
- X está barriendo (no es proposición)
- Un triángulo es menor que un círculo (no es proposición)
- Miguel Hidalgo y Castilla descubrió América (es una proposición)
- 1 + 4 = 5 (es una proposición)
- Ambato es una ciudad de la Sierra Ecuatoriana (es una proposición)

3.3.2.1 Proposición simple y atómica

Es aquella proposición que está formada por un sujeto y un solo predicado.

EJEMPLO

Carlos Marx nació en Alemania

Los fenómenos físicos son irreversibles

3.3.2.2 Proposición compuesta o molecular

Es aquel enunciado que está formado por dos o más proposiciones simples y que están enlazados por un conector lógico.

Ejemplo

María barre, canta y no fuma.

Los inteligentes deliberan y los necios deciden

Si suena el timbre, entonces es hora de empezar la clase

El alumno participará en clase si y solo sí está realmente motivado

3.3.3 Conectores lógicos

Los conectores lógicos son símbolos que enlazan proposiciones atómicas, sin formar parte de ellos (Epp, 2011; Grimaldi, 2004).

La conjunción ∧

La disyunción ∨

La condicional →

La bicondicional ↔

La negación ~ o ¬

3.3.3.1 Conjunción

Si p y q representan dos variables proporcionales, la proposición compuesta "p^q ", que se simboliza como p^q, se llama proposición conjuntiva de p y q o conjunción de p y q.

La conjunción se caracteriza por ser verdadera únicamente cuando las dos proposiciones son verdaderas, en cualquier otro caso serán falsa.

Tabla 1. Conjunción.

p	q	p^q
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
0	**1**	**0**
0	**0**	**0**

En todo párrafo, las palabras "pero", "sin embargo", además", "no obstante", "aunque", "a la vez", equivalen al conectivo "^".

Ejemplo

1.- Quito es Capital del Ecuador y es una ciudad de la serranía

p: Quito es Capital del Ecuador

q: Quito es una ciudad de la serranía

$$p \wedge q$$

1 1

1

2.- 3 es menor que 5, pero mayor que 1

p: 3 es menor que 5

q: 3 es mayor que 1

p ^ q

1 1

1

3.- El Sena es una vía de Francia y Paris es capital de Francia

p: Sena es una vía de Francia

q: Paris es capital de Francia

p ^ q

1 1

1

3.4 Disyunción inclusiva o débil de p∨q

La disyunción inclusiva o débil de p∨q se denota por “p∨q” y se lee p o q.

La disyunción se caracteriza por ser verdadero cuando lo sea, o bien “p oq” o ambas a la vez, por lo tanto, el resultado de la disyunción será falsa cuando “p y q” sean falsos a la vez.

Tabla 2. Disyunción inclusiva o débil de $p \vee q$.

p	**q**	**p∨q**
1	**1**	**1**
1	**0**	**1**
0	**1**	**1**
0	**0**	**0**

La disyunción “o” puede ser reemplazado por otras palabras tales como “a menos que”, “salvo que”, “o también”, “excepto que”.

Ejemplos: Luis estudia ingles en un instituto o vivió en Estados Unidos

3.5 Disyunción exclusiva o fuente

Se denota por $p \veebar q$ y se lee: “o p o q”; p o q pero no ambos.

La disyunción exclusiva es verdadera solo cuando una de sus componentes es verdadera:

Tabla 3. Disyunción exclusiva o fuente.

p	**q**	**p⊻q**
1	**1**	**0**

1	**0**	**1**
0	**1**	**1**
0	**0**	**0**

Ejemplos

Patricia es hija de Pedro o Juan

Estoy en Rusia o en España

O el carro de Pedro es azul, o el carro de Pedro es amarillo**.**

3.6 Negación

La negativa de cualquier proposición p se llama negación y se simboliza mediante ~p.

p	**~p**
1	**0**
0	**1**

Ejemplo

p: Octavio está diciendo la verdad

~p: Octario no está diciendo la verdad

~p: No ocurre que Octavio está diciendo la verdad

~p: No es cierto que Octavio está diciendo la verdad

p: tengo un cheque de 200 dólares

q: Tengo un cheque 100 dólares

$$\sim (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$$

No es cierto que tengo un cheque de 200 dólares y un cheque de 200 dólares.

3.7 Condicional

La proposición "si p, entonces q" se llama condicional se simboliza por medio de $\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$; p se llama hipótesis o antecedentes, y q se denomina conclusión a consecuentes se lea también: p solo si q: q, si p

La condicional es falsa, sólo si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, siendo verdadero en todos los demás casos.

Tabla 4. Condicional.

p	q	p→q
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
0	**1**	**1**
0	**0**	**1**

Ejemplo

Si ganó el loto, entonces te regalo un tv.

Si $7 < 14$, entonces $7 + 2 < \mathbf{14 + 2}$

1 1

1

Si 7+5=12, entonces 7+10= 15

1 0

0

Si tu tienes seis piernas, entonces George Washington fue presidente de E.E.U.U.

1

1

3.8 Variaciones de la condicional

p→q Condicional

q→p Reciproca

~p→ ~q

~q→ ~p

Ejemplo

1) P: Este animal es un ave

q: Este animal tiene alas

Condicional: Si este animal es un ave, entonces tiene alas p→q

Reciproca: Si este animal tiene alas, entonces es un ave q→p

Inversa: Si este animal no es un ave, entonces no es un ave ~p→ ~q

Contrarrecíproca: Si este animal no tiene alas, entonces no es un ave ~q→ ~p

2) Escribir la recíproca, la inversa y la contrarrecíproca de la proposición:

Si es un Ferrari, entonces es un automóvil

p: es un Ferrari

Condicional p→ $\boldsymbol{q}$

Inversa: Si es un automóvil, entonces es un Ferrari

Contrarrecíproca: Si no es un automóvil, entonces no es un Ferrari

Nos podemos dar cuenta que la recíproca no tiene el mismo valor de que la original.

Tabla 5. Variaciones de la condicional.

				Proposición	Reciproca	Inversa	Contrarrecíproca
p	**q**	**~p**	**~q**	**p→q**	**q→p**	**~p→ ~q**	**~q→ ~p**

1	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
0	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**

3.9 Ley de la contrarrecíproca

Una posición condicional puede ser reemplazada por su contrarrecíproca sin que se afecte su valor de verdad.

p: Juan obedece la ley

q: Juan va a la cárcel

Proposición: Si Juan obedece la ley, entonces no va a la cárcel

Contrarreciproca: Si Juan va a la cárcel, entonces no obedece la ley

3.10 Ejercicios

1.- Traduzca las oraciones de los problemas a la forma: si, entonces y luego a la forma simbólica

a. Tendrás éxito solamente si aprecias la opinión de los demás.
b. Iré el sábado si me pagan.
c. Todo sucede a todo el mundo tarde o temprano si hay tiempo suficiente.
d. Todo trabajo es noble.

e. Para que un polígono sea cuadrado, es necesario que sea rectangular**.**

2.- Determine el valor de verdad.

a) Si 7+9=16

b) Si (-2)(-3)=-6, entonces (2)(3)=6

3.- Traduzca cada una de las siguientes proposiciones al lenguaje común:

P: Te gustan las matemáticas

q: Te gusta este libro

a) 8. p→q

b) 9. [p∨ (¬$\boldsymbol{p}$)] → $\boldsymbol{q}$

c) 10. p→ (∼ $\boldsymbol{p}$ → $\boldsymbol{q}$)

d) 11. (p∨ $\boldsymbol{q}$) ∨ [$\boldsymbol{p}$ ∧ (∼q)]

e) 12. (p∧ $\boldsymbol{q}$) ∧ [$\boldsymbol{p}$ →(∼$\boldsymbol{q}$)]

f) 13. (p∧ $\boldsymbol{q}$) → $\boldsymbol{p}$

g) 14. (p→ $\boldsymbol{q}$) → [$\boldsymbol{q}$ →(∼$\boldsymbol{q}$)]

4.- Elabore la tabla de verdad de:

[(p→ $\boldsymbol{q}$) → $\boldsymbol{r}$] → [(q→ $\boldsymbol{p}$) → $\boldsymbol{r}$]

3.11 Soluciones

1.-

a) p→ $\boldsymbol{q}$

b) Si me pagan, entonces ire el sábado. P→ $\boldsymbol{q}$

c) Si hay tiempo suficiente, entonces todo le sucede a todo mundo tarde o temprano

t: hay tiempo suficiente

s: todo le sucede a todo mundo temprano

t→ $(\boldsymbol{s} \vee \boldsymbol{r})$

d) p: Es trabajo

q: Es noble

p→ $\boldsymbol{q}$

Si es trabajo, entonces es noble

e) Si un polígono es cuadrado, entonces es rectángulo

p: un polígono es cuadrado

q: un polígono es rectángulo

p→ $\boldsymbol{q}$

2.-

a) Si 7+9=16, entonces 16-9=7

1 1

1

7. 0 0

1

b) Si te gustan las matemáticas, te gusta este libro.

3.- Si te gustan o no te gustan las matemáticas, entonces te gusta este libro.

15.

Tabla 6. Ejercicio 3

p	q	p→ $\boldsymbol{q}$	(p→ $\boldsymbol{q}$) → $\boldsymbol{r}$	q→ $\boldsymbol{p}$	(q→ $\boldsymbol{p}$) → $\boldsymbol{r}$	[(p→ $\boldsymbol{q}$) → $\boldsymbol{r}$] → [(q→ $\boldsymbol{p}$) → $\boldsymbol{r}$]
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	0	1

3.12 Bicondicional

La lectura es: 1. p si y sólo si: q

2. q si y sólo p

3. Si p, entonces q, y recíprocamente

4. Si q, entonces p, y recíprocamente

5. p es una condición necesaria y suficiente para q

6. q es una condición necesaria y suficiente

Tabla 7. Bicondicional .

p	**q**	**p⇔ *q***
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
0	**1**	**0**
0	**0**	**0**

Tabla 8. Bicondicional 2.

p	**q**	**p→ *q***	**q→ *p***	**(p→ *q*) ∧ (q→ *p*)**
1	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**1**	**0**

0	**1**	**1**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**1**	**1**

Si p y q tienen valores de verdad iguales, se dice que p es equivalente a q y se escribe p⇔ ***q***

Ejemplo: Si

p: Este problema se puede resolver

q: A Rogelio le agrada este problema

Este programa se puede resolver si y sólo si a Rogelio le agrada este problema

p⇔ ***q***

3.12.1 Demostraciones usando tablas de verdad

Usando tablas de verdad, demuestra que p→ *q* es equivalente a (~p∨q)

p	**q**	**~p**	**p→ *q***	**~p∨q**	**(p→ *q*) ∧ (~p∨q)**
1	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**

0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**

3.13 Ejercicios

1.- Demuestre usando tablas de verdad que: [p→ ∼q] es equivalente a {p∨ ∼q]

Tautología

Una tautología es una proposición que es verdadera en todos los casos de su tabla de verdad.

Si todos los valores de la última columna son Falsos, la proposición dada se llama contradicción.

2.- Demostrar la siguiente proposición:

Si Maradona es argentino, entonces es aficionado al fútbol. Pero, Maradona no es un aficionado al futbol. Por lo tanto, no es argentino.

Solución:

p: Maradona es argentino

q: Maradona es aficionado al futbol

[(p→ q) ∧ (∼q)] → ∼p

1 1 1 0 0 1 0

1 0 0 0 1 1 0

0 1 1 0 0 1 1

0 1 0 1 1 1 1

3.- Si Álvaro obtiene la máxima calificación en el examen final, entonces pasará el curso. Álvaro obtiene la máxima calificación en el examen final. Por lo tanto, Alvaro pasa el curso.

Solución

p: Alvaro obtiene la máxima calificación en el examen final.

q: Alvaro pasará el curso.

$[(p \rightarrow q) \wedge (p)] \rightarrow q$

1 1 1 1 1 1 1

1 0 0 0 1 1 0

0 1 1 0 0 1 1

0 1 0 1 1 1 0

3.14 Reglas de inferencia

3.14.1 Modus ponendo ponens (regla de separación)

P1 $p \rightarrow q$

P2 p___

C q

[(p→ $\boldsymbol{q}$) ∧ $\boldsymbol{p}$] → $\boldsymbol{q}$

Ejemplo

Si está lloviendo, entonces el reloj es fino. Esta lloviendo.

P: está lloviendo q: el reloj es fino

P1 p→ $\boldsymbol{q}$

P2 p___

C q

C: P1 Y P2; R1, el reloj es fino

Si él está en el partido de futbol, entonces él está en el estadio. El está en el partido de futbol. ¿Qué conclusión se obtiene?

p: él está en el partido de futbol

q: él está en el estadio

P1 p→ $\boldsymbol{q}$

P2 p___

C q

C; P1 Y P2: R1, él está en el estudio

3.15 Ejercicios

1.- De las premisas dadas a continuación obtenga como conclusión m

P1 a→ *b*

P2 b→ *m*

P3 a

Solución

P1 a→ ***b***

P3 a___

b C1; P1 Y P3; R1

P1 b→ ***m***

P3 b___

M C; P2 Y C1; R1

2.- De las premisas dadas obtenga una conclusión:

P1: p∧ *q* →r

P2: p∧ *q*

Solución

P1: p∧ ***q*** →r

P2: p∧ $\boldsymbol{q}$___

r C; P1 Y P2; R1

3.16 Doble negación

$$\frac{\sim\sim\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p}} \quad \frac{\boldsymbol{p}}{\sim\boldsymbol{p}}$$

Ejemplo:

P1: Juan está regando el Jardín

$\frac{\boldsymbol{p}}{\sim\sim\boldsymbol{p}}$ No es verdad que Juan no está regando el Jardín

3.17 Modus tollendo tollens

Regla de inferencia contrapositiva (negar negando)

P1 p→ $\boldsymbol{q}$ $[(p\rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge \sim\boldsymbol{q}] \rightarrow \sim\boldsymbol{p}$

P2 $\sim\boldsymbol{q}$___

C ~p

Ejemplo:

Si tiene luz propia, entonces el astro es una Estrella. El astro no es una estrella. ¿Qué se puede concluir?

Pi tiene luz propia

P1: p→q

P2 $\underline{\sim q}$

C ∼p C; P1 Y P2; R3. No tiene luz propia

3.18 Ejercicios

1.- Obtenga las conclusiones de las siguientes proposiciones compuestas:

P1 p∨ q →r

Solución q∨ r →s

P2 ∼s $\underline{\sim s}$

∼(q∨ r) C;P1 Y P2; R3

2.- P1 p→ ∼q

Solución p→ ∼q

P2 ∼q $\underline{\sim\sim q}$

∼p C1; P1 Y P2; R3

3.- Si es por la mañana, entonces el sol estará en el este. El Sol no está en el este. ¿Qué se concluye?

Solución

p: es por la mañana

q: el sol está en el este

P1: p→q p→q

P2: $\sim q$ $\underline{\sim q}$

$\sim p$ C; P1 Y P2; R3. No es por la mañana

3.19 Conmutativa

$$\frac{p \wedge q}{q \wedge p} \qquad \frac{P \vee q}{q \vee P}$$

Ejemplo

O una fuerza actuó sobre un cuerpo o la velocidad del cuerpo no varía.

P: Una fuerza actúa sobre un cuerpo

q: la velocidad varía

$$\frac{p \vee \sim q}{\sim q \vee P}$$

O la velocidad no varía o una fuerza actúa sobre un cuerpo**.**

3.20 Adjunción

P

q

P∧q

Ejemplo:

p: Jorge es adulto p

q: María es adolescente q

p∧q C; R5;

Jorge es adulto y María es adolescente

3.21 Simplificativa

$$\frac{P \wedge q}{P} \qquad \frac{P \wedge q}{P}$$

Ejemplos:

P: El cumpleaños de Katiuska es el viernes

q: El cumpleaños de Pedro es el sábado

P∧q

$$\frac{P \wedge q}{P}$$

C; R6; El cumpleaños de Katiuska es el viernes

3.22 Modus tollendo ponens

P1 P∨q q∨P

P2 ~P ~ q ’

C q P

Ejemplos:

1.- X es número par o múltiplo de 5. X no es par

P: x es número par

q: x es múltiplo de 5

P1 pVq PVq

P2 ~P ~P

q C; P1 Y P2; R7. X es múltiplo de 5

2.- Si los precios son altos, entonces los salarios son altos. Los precios son altos o hay control de precios. Además, si hay control de precios, el costo de la vida no sube. El costo de la vida sube. ¿Cúa es la conclusión?

P: los precios son altos

q: los salarios son altos r→~

r: hay control de precios s

S: el costo de la vida sube ~***r*** C; P3 y P4, R3

P1: P→q

P2: P∨ ***r***

P3: r→~s

P4: s P∨ ***r***~r

P C2; P2C1; R7

P→q

P___

q C; P3 Y C2; R1

C: los salarios son altos

3.23 Adición

$$\frac{P}{P \vee q} \qquad \frac{q}{q \vee P}$$

Ejemplo:

Los estudiantes de informática son alegres

P: los estudiantes de informática son alegres

q: los estudiantes de Informática son activos

$$\frac{P}{P \vee q}$$

Los estudiantes de Informática son alegres o activos.

Demostrar: r∨∼ s

P1: s∨ q $\quad \frac{s \wedge q}{q}$ C1; P1; R6

P2: t→∼q t→ $\sim q$

P3: ∼t→r q_____

$\sim \boldsymbol{t}$ C2; P2C1;R3

$\sim t \rightarrow r$

$\underline{\sim t}$

r C3; P3 y C2, R1

$\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r} \vee \sim \boldsymbol{s}}$ C; C3; R8

3.24 Simplificación disyuntiva

$$\frac{\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{P}}{\boldsymbol{P}}$$

Ejemplo:

Ricardo tiene auto último modelo o Ricardo tiene auto último modelo.

$\frac{\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{P}}{\boldsymbol{P}}$ C Ricardo tiene auto último modelo

Regla N.-10 Rio Sigolismo Hipotético

P1: $\sim P \rightarrow \sim q$ $\sim P \rightarrow \sim q$

P2: $\sim q \rightarrow \sim r$ $\underline{\sim q \rightarrow \sim r}$

$\sim P \rightarrow \sim r$ C; P1 Y P2; R10

Establecer la validez del razonamiento

Si practicas algún deporte, mejor tu circulación sanguínea. Si mejora tu circulación sanguínea, mejora tu oxígeno. Si mejora tu oxígeno, tus neuronas reciben mayor oxígeno. Si tus neuronas reciben mayor oxígeno, tu capacidad de aprender es mayor. Por tanto; si haces deporte, tienes mayor capacidad de aprender.

P: practicas algún deporte

q: tu circulación sanguínea mejore

r: tu oxigenación mejora

s: tus necesidades reciben mayor oxigenación

t: tu capacidad de aprender es mayor

P1: P→q

P→q

P2: q→r q→r

P3: r→ ***s*** r→ ***s***

P4: s→t s→t

P→t C, P1P2P3P4**,**

3.25 Sigolismo disyuntivo

P1 P∨q

P2 P→r

P3 $\underline{q \rightarrow s}$

C $r \vee s$

Ejemplos:

P1: ~PVq ~PVq

P2: ~P→~r ~P→~r

P3: q→s $\underline{\quad q \rightarrow s \quad}$

~rVs C, P1P2P3; R4

3.26 Ejercicios

1.- Obtener Conclusión de:

a) P1 ~tV~s

P2 ~s→P

P3 ~t→q

b) P1 sV~t

P2 ~t→r

P3 s→r

c) P1 s→~r

P2 t→~r

P3 sVt

3.27 Bicondicional

P $\dfrac{P\leftrightarrow q}{(P\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow P)}$ $\dfrac{(P\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)}{p\leftrightarrow q}$

Ejemplo:

El Sol sale y se pone si y solo si la tierra gira .La Tierra gira y la luna se mueve alrededor de la tierra. Por tanto, el Sol sale y se pone o el clima es muy caliente.

P: el Sol sale

q: el Sol se pone

r: la Tierra gira

s: La luna se mueve alrededor de la Tierra

t: el clima es muy caliente

$$\frac{(P\wedge q)\leftrightarrow r}{(P\wedge q)\rightarrow r \wedge r\rightarrow (P\wedge q)\mathbf{C1},\mathbf{P1},\mathbf{R13}}$$

$$\frac{(P\wedge q)\leftrightarrow r\wedge r\rightarrow (p\wedge q)}{r\rightarrow (P\wedge q)\mathbf{C2},\mathbf{C1},\mathbf{R6}}$$

P1: (p$\wedge q$) ↔r $\quad\quad$ $\dfrac{r\wedge s}{r}$ c3, P2, R6

P2: r$\wedge s$

D : (p$\wedge q$)Vt

$$r \rightarrow (p \wedge \boldsymbol{q})$$

$$\underline{r \quad\quad\quad}$$

$(p \wedge q)$ C4, C3, R1

$$_____$$

$(p \wedge \boldsymbol{q})$ Vt C; C4; R11

3.28 Conjunción negativa

$$\frac{\boldsymbol{p \downarrow q}}{\boldsymbol{\sim p \wedge \sim q}} \qquad \frac{\boldsymbol{\sim p \wedge \sim q}}{\boldsymbol{p \downarrow q}}$$

Ejemplo

N: Ricardo Palma fue escritor Ni María Tagri fue poeta

P: Ricardo Palma fue escritor

q: María Tegri fue Poeta

P: $\sim p \wedge \boldsymbol{\sim q}$ $\quad \frac{\boldsymbol{\sim p \wedge \sim q}}{\boldsymbol{p \downarrow q}}$ C, P1, R14

3.29 Disyunción exclusive

$$\mathbf{p \underline{\vee} q}$$

$$_____$$

$$\mathbf{(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge \boldsymbol{q})}$$

Ejemplo:

P1: p V q

P2: p→t

P3: q→(s∧ $\boldsymbol{t}$)

(pVq) ∧~(p∧q)

_____

(p V q)

p V q

_____

(pvq)∧~ (p∧q)C1,P1;R15

_____

p v q C2,C1,R4

p V q

P →t

q→(s∧t)

_____

t V (s∧t) C; C2P2P3; R11

3.30 Algebra de proposiciones

3.30.1 Disyunción

p V (q V r) ≡ (p v q) V r Asociativa

p v 0 ≡ P Identidad

p v 1 ≡ 1 Absorción

p v ~p ≡ 1 Ley del tercero Incluido

3.30.2 Conjunción

p ∧ (qVr) ≡ (p ∧ q) V r Asociativa

p ∧ 1 ≡ p Identidad

p ∧ **0** ≡ **0** Contradicción

p V (q∧r) ≡ (p V q) ∧ (p V r) Distributiva

p ∧ (q ∨ r) ≡ (p ∧ q) V (p ∧ r) Distributiva

p V (p ∧ q) ≡ P Absorción

p ∧ (pVq) ≡ p Absorción

3.31 Ejercicios

1.- Obtener una conclusión válida empleando todas las Premisas:

a) P1: Si eres bien parecido, entonces te casas con un millonario

P2: Tú no te casas con una millonaria

2.- P1: Si vamos a un día de campo, entonces preparamos la comida.

P2: Si preparamos la comida, entonces compramos pan

P3: Si compramos pan, entonces vamos a la tienda

3.- P1: Si el reloj está adelantado, entonces Isaac llegó antes de las 10 y vio partir el coche de Edwin.

P2: Si Edwin dice la verdad, entonces Isaac no vio partir el coche de Edwin.

P3: Edwin dice la verdad o estaba en el momento del Carmen.

P4: El reloj, esta adelantada

4.- Demostrar D: S de:

P1: p V ~(q V ~s)

P2: ~P

4.- No ocurre que: “los murciélagos son pájaros o que las focas son peces”. Por lo tanto; los murciélagos no son pajaros.

5.- Si 2 es mayor que 1, entonces 3 es mayor que 1. Si 3 es mayor que 1, entonces 3 es mayor que 0. 2 es mayor que 1. Por lo tanto 3 es mayor que 0.

6.- D:- r V ~s

P1: s ∧ q

P2: t→~q

P3: ~t→r

7.- D: ~P

P1: p→q

P2: ~r∧t

P3: ~r→~q

8.- D: p V s

P1: ~t

P2: r→(pVs)

P3: ~t (t∧q)→r

9.- D: q

P1: q↔(s V ~p)

P2: ~ (~s ∧ p)

10.- D: ~p

P1: p→q

P2: (s ∧ t) → ~q

P3: t

P4: s

11.- D: ~s

P1: ~r ↔ ~q

P2: ~r

P3: ~q → ~s

12.- D: p

P1: ~(s V q) → ~t

P2: ~p→t

P3: ~s

P4: ~s→~q

13.- D: (r ∧ ~t)

P1: p V ~(r→t)

P2: s ∧ b↔p

P3: b→~s

14.- Obtenga la conclusión del siguiente razonamiento:

Si Pedro tiene la misma edad que Tomás, entonces Tomás tiene la misma edad que Juana. Si Pedro tiene distinga edad que Tomás,

entonces Pedro tiene distinta edad que Juana. Tomás tiene 17 anios y Pedro tiene la misma edad que Juana.

15.- D: ~q∧ *s*

P1: s ∧~ r

P2: r V ~t

P3: q→t

16.- D:s

P1: p→q

P2: q→~r

P3: r

P4: p V (t∧s)

17.- Si juana no grita, sus hijos no le obedecen. Si los hijos de Juana no le obedecen, entonces Juana se enoja. Juana no está gritando. Por lo tanto Juana está enojada.

18.- D: d V r

P1: ~t V (b V c)

P2: ~t → d

P3: (b V t) → s

P4: ~s

3.32 Métodos indirectos

3.32.1 Regla de la premisa p

Esta Regla permite introducir una nueva premisa en una demostración siempre que desee.

Ejemplo:

D: r

R: p→~q

P2: ~r→p

P3: ~q→r

P: ~r

p→~q

~q→r

———

P → r C1, P1P2, R1

~r

———

~p C2, C1P1, R3

~r→p

~p

———

R C1, P2C2, R3

3.33 Ley del absurdo

Si de un conjunto de premisas y de la negación de P se infiere una contradicción, entonces de dicho conjunto se infiere p.

D: ~p

P1: ~q V r

P2: p→~r

P3: q

P: P

P→~r

P____

~r C1, P2P1, R1

~q V r

~ r___

~ q

q

q ∧ ~q C1, C2P3, R5

~p por la ley del Absurdo

3.34 Regla demostración condicional

Si de un conjunto de premisas y de p se deduce que entonces de tal conjunto de premisas se deduce p→q

La premisa p, puede ser introducida en cualquier parte del proceso deductivo.

Ejemplos

D: ~q→s

P1: p V q

P2: p→s

P: ~q

P V q

~q

P C1; P1P; R7

p→s

p

s C2, P2C1; R1

~q → s C: P2C2, R.D.C.

p→q

~q

P C1; P3P; R5

s V p

~P

S C2; P2C1; R7

s→r

s

r C3; P1C2; R1

r→t

r

t C4; P4C3; R1

C: ~q→t R.D.C.

CAPÍTULO IV

4 TRIGONOMETRIA

DESTREZAS CON CRITERIOS DE DESEMPEÑO

ONCDM. 5.4.1 Aplicar Identidades Trigonométricas básicas y funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente) con argumentos de sumas y diferencias de números reales en la simplificación de expresiones**.**

ONCDM. 5.4.2. Aplicar seno, coseno y tangente con argumentos de ángulo doble, triple, cuádruple, mitad; y fórmulas de transformación de senos y cosenos en productos para resolver problemas modelizados con funciones trigonométricas interpretado y juzgando la validez y pertinencia de los resultados obtenidos.

ONCDM. 5.4.3. Resolver ecuaciones e inecuaciones trigonométricas e identificar el conjunto solución de valores para la variable dada.

4.1 Identidades trigonométricas

Las identidades trigonométricas son igualdades que involucran funciones trigonométricas. Estas identidades son siempre útiles para cuando necesitamos simplificar expresiones que tienen incluidos funciones trigonométricas cuales quiera que sean los valores que sea siguen a los ángulos para los cuales están definidos estas razones (Lial et al., 2016; Stewart et al., 2016; Sullivan, 2017).

4.1.1 Identidades reciprocas

$$sen\theta = \frac{1}{csc\theta}$$

$$cos\theta = \frac{1}{sec\theta}$$

$$tan\theta = \frac{1}{cot\theta}$$

4.1.2 Razón

$$tan\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta}$$

$$cot\theta = \frac{cos\theta}{sen\theta}$$

4.1.3 Relaciones pitagóricas

$$\boldsymbol{sen^2\theta + cos^2\theta = 1}$$

$$\boldsymbol{tan^2\theta + 1 = sec^2\theta}$$

$$\boldsymbol{cot^2\theta + 1 = csc^2\theta}$$

Ejemplos

1. Verificar la siguiente identidad

$$cos\theta sec\theta = 1$$

$$cos\theta\left(\frac{1}{cos\theta}\right)=1$$

1=1

2. Comprobar la identidad trigonométrica

$$tan\theta + cot\theta = sec\theta + csc\theta$$

$$\frac{sen\theta}{cos\theta} + \frac{cos\theta}{sen\theta}$$

$$\frac{sen^2\theta + cos^2\theta}{cos\theta sen\theta}$$

$$\frac{1}{cos\theta sen\theta}$$

$$sec\theta . csc\theta$$

3. Verificar la identidad trigonométrica

$$cot^2\theta = cos^2\theta + (cot\theta . cos\theta)^2$$

$$= cos^2\theta + \ cot^2\theta . cos^2\theta$$

$$= cos^2\theta + \ (1 + cot^2\theta)$$

$$= cos^2\theta . (\ csc^2\theta)$$

$$= \frac{cos^2\theta}{sen^2\theta}$$

$$= cot^2\theta$$

4. Verificar la identidad trigonométrica

$$cot\theta . sec\theta = csc\theta$$

$$\frac{cos\theta}{sen\theta} * \frac{1}{cos\theta}$$

$$\frac{cos\theta}{sen\theta . cos\theta}$$

$$\frac{1}{sen\theta}$$

$$csc\theta$$

4.2 Ejercicios

1.- Verificar las identidades trigonométricas

1. $\frac{tan\theta - cot\theta}{tan\theta + cot\theta} = sen^2\theta - cos^2\theta$
2. $1 + tan^2\theta = \frac{1}{cos^2\theta}$
3. $\frac{2 - sen^2\theta}{cost} = sent + cost$
4. $\frac{senx + cosx}{senx} = 1 + \frac{1}{tanx}$
5. $\frac{2 - cos\theta}{sen\theta} = csc\theta + sen\theta$
6. $\frac{sen\theta}{csc\theta} + \frac{cos\theta}{sec\theta} = 1$
7. $\frac{secy}{tany + coty} = seny$
8. $\frac{tanx + cotx}{tanx - cotx} = \frac{sen^2x}{tan^2x - 1}$
9. $\frac{1 - senx}{sen^3\theta} = \frac{cosx}{1 + senx}$
10. $tan^2\theta - sen^2\theta = tan^2\theta sen^2\theta$
11. $\frac{tanx - senx}{sen^3x} = \frac{sec}{1 + cosx}$
12. $(sec\theta - tan\vartheta)(csc\theta + 1) = cot\theta$

13. $\boldsymbol{secx(1 - sen^2x) = cosx}$

4.3 Suma y diferencia de dos ángulos

4.3.1 Suma

$$\boldsymbol{sen(A + B) = senAcosB + cosAsenB}$$

$$\boldsymbol{\cos(A + B) = cosAcosB - senAsenB}$$

$$\boldsymbol{\tan(A + B) = \frac{tanA + tanB}{1 - tanAtanB}}$$

4.3.2 Diferencia

$$\boldsymbol{\text{sen}(A - B) = senAcosB - cosAsenB}$$

$$\boldsymbol{\cos(A - B) = cosAcosB - senAsenB}$$

$$\boldsymbol{\tan(A + B) = \frac{tanA - tanB}{1 - tanAtanB}}$$

Ejemplos:

1. Encontrar el valor exacto de $\boldsymbol{sen75^0}$

$$\boldsymbol{sen\ 75^0 = sen(30^0 + 45^0)}$$

$$\boldsymbol{= sen\ 30^0 * cos45^0 + cos30^0 sen45^0}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\boldsymbol{= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

2. Encontrar el valor exacto de: $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$$\frac{\pi}{12} = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{3} * cos\frac{\pi}{4} + sen\frac{\pi}{3} * sen\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

3. Simplificar la expresión $\cos\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)$

$$\cos\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) = cos\theta * cos\frac{3\pi}{2} + sen\theta * sen\frac{3\pi}{2}$$

$$= cos\theta(0) + sen\theta(-1)$$

$$= -sen\theta$$

4. Verificar la siguiente identidad:

$$\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{tanx-1}{tanx+1}$$

$$\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

Ponemos en términos de seno y coseno

$$\frac{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$$

Aplicamos las fórmulas de seno y coseno de la diferencia de ángulos

$$\frac{senxcosx-cosxsen\frac{\pi}{4}}{cosxcos\frac{\pi}{4}+senxsen\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{senx\frac{1}{\sqrt{2}}-cosx\frac{1}{\sqrt{2}}}{cosx\frac{1}{\sqrt{2}}+senx\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Multiplicando numerador y denominador por $\frac{\sqrt{2}}{cosx}$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{cosx}(\frac{1}{\sqrt{2}})(senx-cosx)}{\frac{\sqrt{2}}{cosx}(\frac{1}{\sqrt{2}})(cosx+senx)}$$

$$\frac{\frac{1}{cosx}(senx-cosx)}{\frac{1}{cosx}(cosx+senx)}$$

$$\frac{\frac{senx}{cosx} - \frac{cosx}{cosx}}{\frac{cosx}{cosx} + \frac{senx}{cosx}}$$

$$\frac{tanx - 1}{1 + tanx}$$

$$\frac{tanx - 1}{tanx + 1}$$

4.4 Ejercicios

1. **Hallar $tan15^0$**
2. **Probar que $sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cosx$**
3. **Hallar el valor de $sen15^0$**
4. **Hallar el valor de $cos15^0$**
5. **Hallar el valor de sen150^0**

4.5 Ángulo doble

$$sen2\theta = 2sen\theta cos\theta$$

$$cos2\theta = cos^2\theta - sen^2\theta \quad \text{ó} \quad 1 - 2sen^2\theta \quad \text{ó} \quad 2cos^2\theta\text{-}1$$

$$tan2\theta = \frac{2tan\theta}{1 - tan^2\theta}$$

Ejemplos

1. **Calcular $sen60^0$**

$$sen60^0 = sen(2 * 30^0) = 2sen30^0 cos30^0 = 2 * \frac{1}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. Calcular $tan60^0$

$$tan60^0 = \tan(2 * 30^0) = \frac{2tan30^0}{1 - tan30^0} = \frac{2 * \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - (\frac{\sqrt{3}}{3})^2} = \sqrt{3}$$

4.6 Ángulo medio

$$\text{Si } sen\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\theta}{2}}$$

$$cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+cos\theta}{2}}$$

$$tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\theta}{1+cos\theta}} = \pm\frac{1-cos\theta}{sen\theta} = \pm\frac{sen\theta}{1+cos\theta}$$

Ejemplos

1. Calcular $sen\frac{\pi}{8}$

$$sen\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-cos\frac{\pi}{4}}{2}}$$

$$sen\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

El ángulo $\frac{\pi}{8}$ es agudo por eso se toma el signo positivo del radical**.**

2.- Calcular el coseno, el seno y la tangente del ángulo de 15^0 en función de cos 30^0

$$cos15^0 = \frac{\sqrt{1+cos30^0}}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$cos15^0 = 0.9659$$

$$sen\ 15^0 = \sqrt{\frac{1-cos30^0}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = 0.2588$$

$$tan15^0 = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}} = 2-\sqrt{3} = 0.2679$$

4.7 Ejercicios

1. **Calcular $tan22.50^0$ en función de $tan45^0$**
2. **Dado $sen\theta = \frac{3}{5}$, calcular $sen\frac{\theta}{2}$ y $cos\frac{\theta}{2}$. (El ángulo dado es del 1.- cuadrante).**
3. **Dado $cos\theta = \frac{5}{13}, calculense\ sen\frac{\theta}{2}\ y\ cos\frac{\theta}{2}. (\theta\ es\ agudo)$**
4. **Dado $tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{3}$, calcúlese $cos\alpha\left(\frac{\alpha}{2}\ es\ agudo\right)$**

4.8 Transformar en productos sumas y diferencias de senos y cosenos

$$senA + senB = 2sen\frac{1}{2}(A+B)cos\frac{1}{2}(A-B)$$

$$\boldsymbol{senA - senB = 2sen\frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}(A+B)}$$

$$\boldsymbol{cosA + cosB = 2cos\frac{1}{2}(A+B)cos\frac{1}{2}(A-B)}$$

$$\boldsymbol{cosA - cosB = -2cos\frac{1}{2}(A+B)sen\frac{1}{2}(A-B)}$$

$$\boldsymbol{tanA + tanB = \frac{sen(A+B)}{cosAcosB}}$$

$$\boldsymbol{tanA - tanB = \frac{sen(A-B)}{cosAcosB}}$$

Ejemplo

1.- Compruebe que:

$$\boldsymbol{\frac{senA + senB}{senA - senB} = \frac{tan\frac{1}{2}(A+B)}{tan\frac{1}{2}(A-B)}}$$

Desarrollamos la suma y la diferencia de los senos, se obtiene:

$$\boldsymbol{senA + senB = 2sen\frac{1}{2}(A+B)cos\frac{1}{2}(A-B)}$$

$$\boldsymbol{senA - senB = 2sen\frac{1}{2}(A-B)cos\frac{1}{2}(A+B)}$$

Dividimos miembro a miembro:

$$\boldsymbol{\frac{senA + senB}{senA - senB} = tan\frac{1}{2}(A+B)cot\frac{1}{2}(A-B)}$$

Como $\boldsymbol{cot\frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{tan\frac{1}{2}(A-B)}}$

Obtenemos, haciendo la sustitución

$$\frac{\boldsymbol{senA+senB}}{\boldsymbol{senA-senB}} = \frac{\boldsymbol{tan\frac{1}{2}(A+B)}}{\boldsymbol{tan\frac{1}{2}(A-B)}}$$

2. Calcular $\boldsymbol{cos35^0 + cos25^0}$

$$\boldsymbol{cosA + cosB = 2cos\frac{A+B}{2}cos\frac{A-B}{2}}$$

$$\boldsymbol{cos35^0 + cos25^0 = 2cos\frac{1}{2}(35^0+25^0)\cos(35^0-25^0)}$$

$$\boldsymbol{cos35^0 + cos25^0 = 2cos\frac{1}{2}(35^0+25^0)\cos(35^0-25^0)}$$

$$\boldsymbol{cos35^0 + cos25^0 = \frac{2\sqrt{3}}{2}(0.996) = 1.725^0}$$

4.9 Ejercicios

1. **Calcular $\boldsymbol{sen75^0 - sen15^0}$**
2. **Escribe cada una de las expresiones como el producto de dos funciones**
3. **sen 4t + sen 2t**
4. **$\boldsymbol{\cos\frac{\theta}{2} - cos\theta}$**
5. **$\boldsymbol{cos\frac{\theta}{2} + cos\theta}$**

4.10 Transformación del producto en una suma algebraica

$$\text{senAcosB}=\frac{1}{2}[sen(A+B)+sen(A-B)]$$

$$\text{cosAsenB}=\frac{1}{2}[sen(A+B)-sen(A-B)]$$

$$\text{cosAcosB}=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

$$\text{senAsenB}=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)]$$

Ejemplo

1. Calcular $sen75^0 sen15^0$

$$sen75^0 sen15^0 = -\frac{1}{2}[\cos(75^0+15^0)-\cos(75^0-15^0)]$$

$$sen75^0 sen15^0 = -\frac{1}{2}(cos90^0 - cos60^0)$$

$$sen75^0 sen15^0 = -\frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

4.11 Ejercicios

Escribe cada una de las expresiones como la suma o la diferencia de dos funciones

1. $2senxcos2x$
2. $cos6ysen2y$
3. $2cos6\theta sen2\theta$
4. $sen5xsenx$
5. $cos3xsenx$

4.12 Ecuaciones trigonométricas

Se llama Ecuación Trigonométrica a la igualdad que contiene la incógnita bajo los signos de las funciones trigonométricas (Blitzer, 2016; Larson, 2017; Zill & Dewar, 2013).

Ejemplo

1. Resolver la ecuación:

$$\boldsymbol{Tan2x = 3tanx}$$

$$\boldsymbol{\frac{tan2x}{3tanx} = 1}$$

$$\boldsymbol{\frac{tan2x}{tanx} = 3}$$

$$\boldsymbol{\frac{2}{1 - tan^2x} = 3}$$

$$\boldsymbol{3tan^2x = 1}$$

$$\boldsymbol{tanx = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\boldsymbol{x1 = 30^0; x2 = 150^0 \rightarrow \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \left(\frac{5\pi}{6} \pm \pi\right)}$$

2. Resolver la ecuación:

$$\boldsymbol{cos^2x + 3senx = 2}$$

$$\boldsymbol{(1 - sen^2x) + 3senx - 2 = 0}$$

$$\mathbf{1 - sen^2 x + 3senx - 2 = 0}$$

$$\mathbf{-sen^2 x + 3senx - 1 = 0}$$

$$\boldsymbol{x = senx}$$

$$\mathbf{x^2 - 3x + 1 = 0}$$

Aplicando la fórmula de la Ecuación General tenemos que:

$$\boldsymbol{x1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{x2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

$$\text{sen } \boldsymbol{x1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{sen\ x2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

como

$$\boldsymbol{\frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1} \text{ no es solución}$$

$$\mathbf{\frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0.382}$$

$$\boldsymbol{arcsen(0.382) = 22.45^0}$$

$$\boldsymbol{x = 22.45^0}$$

4.13 Ejercicios

Resolver las ecuaciones siguientes, dando todos los ángulos positivos menores que $\mathbf{360^0}$ que las satisfagan

1. $\boldsymbol{senx = cos2x}$
2. $\boldsymbol{cosx = cos2x}$

3. $\boldsymbol{senx = sen2x}$

4. $\boldsymbol{tan2x + tanx = 0}$

5. $\boldsymbol{tan2x = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} tanx}$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ahlfors, L. V. (1979). Complex analysis (3rd ed.). McGraw-Hill.

Anton, H., & Rorres, C. (2014). Elementary linear algebra: Applications version (11th ed.). Wiley.

Axler, S. (2015). Linear algebra done right (3rd ed.). Springer.

Blitzer, R. (2016). Precalculus (5th ed.). Pearson.

Bretscher, O. (2013). Linear algebra with applications (4th ed.). Pearson.

Brown, J. W., & Churchill, R. V. (2014). Complex variables and applications (9th ed.). McGraw-Hill Education.

Copi, I. M., Cohen, C., & McMahon, K. (2014). Introduction to logic (14th ed.). Pearson.

Enderton, H. B. (2001). A mathematical introduction to logic (2nd ed.). Academic Press.

Epp, S. S. (2011). Discrete mathematics with applications (4th ed.). Brooks/Cole.

Friedberg, S. H., Insel, A. J., & Spence, L. E. (2018). Linear algebra (5th ed.). Pearson.

Golub, G. H., & Van Loan, C. F. (2013). Matrix computations (4th ed.). Johns Hopkins University Press.

Grimaldi, R. P. (2004). Discrete and combinatorial mathematics: An applied introduction (5th ed.). Pearson Addison Wesley.

Hammack, R. (2013). Book of proof (2nd ed.). Richard Hammack.

Hurley, P. J. (2014). A concise introduction to logic (12th ed.). Wadsworth Cengage Learning.

Larson, R. (2017). Precalculus with limits: A graphing approach (3rd ed.). Cengage Learning.

Lay, D. C., Lay, S. R., & McDonald, J. J. (2016). Linear algebra and its applications (5th ed.). Pearson.

Leon, S. J. (2015). Linear algebra with applications (9th ed.). Pearson.

Lial, M. L., Hornsby, J., & Schneider, D. I. (2016). Trigonometry (11th ed.). Pearson.

Meyer, C. D. (2000). Matrix analysis and applied linear algebra. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Needham, T. (1997). Visual complex analysis. Oxford University Press.

Poole, D. (2014). Linear algebra: A modern introduction (4th ed.). Cengage Learning.

Rosen, K. H. (2012). Discrete mathematics and its applications (7th ed.). McGraw-Hill.

Saff, E. B., & Snider, A. D. (2003). Fundamentals of complex analysis with applications to engineering and science (3rd ed.). Pearson Education.

Spiegel, M. R., Lipschutz, S., & Liu, J. (2009). Schaum's outline of theory and problems of complex variables (2nd ed.). McGraw-Hill.

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2016). Precalculus: Mathematics for calculus (7th ed.). Cengage Learning.

Strang, G. (2016). Introduction to linear algebra (5th ed.). Wellesley-Cambridge Press.

Sullivan, M. (2017). Precalculus (10th ed.). Pearson.

Velleman, D. J. (2006). How to prove it: A structured approach (2nd ed.). Cambridge University Press.

Zill, D. G., & Dewar, J. M. (2013). Precalculus with calculus previews (5th ed.). Jones & Bartlett Learning.

Zill, D. G., & Shanahan, P. D. (2009). A first course in complex analysis with applications (2nd ed.). Jones and Bartlett Publishers.

Números complejos: Fundamentos y aplicaciones (Guía teórico-práctica para bachillerato y nivel inicial universitario), se publicó en el mes de noviembre de 2026.

ISBN: 978-9907-852-01-1

Grupo Editorial BLR
Ecuador
Cel: +593 98 320 4362
https://grupoblr.com/
publicaciones@grupoblr.com

BIOGRAFÍA DEL AUTOR

José Campoverde Jara:
Magíster en Matemática con mención en Matemática Computacional y docente de la Universidad Técnica de Machala. Cuenta con 15 años de experiencia en la enseñanza de Matemática, Cálculo, Estadística y Álgebra Lineal. Sus intereses incluyen la didáctica y la modelación matemática aplicada.

NÚMEROS COMPLEJOS: FUNDAMENTOS Y APLICACIONES (GUÍA TEÓRICO-PRÁCTICA PARA BACHILLERATO Y NIVEL INICIAL UNIVERSITARIO)

Estimado lector, este libro concibe a la matemática como un lenguaje formal para modelar e interpretar con precisión la realidad, presentando a los números complejos como una extensión indispensable del sistema numérico real para dar solución a problemas algebraicos y fundamentar aplicaciones en ciencias e ingeniería. La obra tiene como propósito fortalecer tanto la comprensión conceptual como la destreza procedimental mediante una secuencia pedagógica clara, progresiva y guiada por ejemplos representativos.

Dirigido a estudiantes de Bachillerato, universitarios que inician carreras afines y docentes en búsqueda de material estructurado, el texto equilibra el rigor analítico con la accesibilidad didáctica. Su organización temática introduce axiomas y propiedades, desarrolla métodos de resolución paso a paso y plantea ejercicios seleccionados orientados a la interpretación de resultados y sus representaciones operativas.

El texto enfatiza que el dominio disciplinar requiere constancia y trabajo autónomo, recomendando abordar los problemas de forma activa antes de verificar las soluciones. En su conjunto, la obra se consolida como un soporte formativo que acompaña el aprendizaje gradual de los sistemas numéricos, promoviendo el desarrollo de competencias cuantitativas sólidas para transitar con éxito hacia estudios superiores de corte científico y técnico.

GRUPO BLR

Grupo Editorial BLR
Ecuador
Cel: +593 98 320 4362
https://grupoblr.com/
publicaciones@grupoblr.com

ISBN: 978-9907-852-01-1

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MACHALA 1969